MECANICĂ
TEORETICĂ
ȘI APLICATĂ

N. Cristescu
I. Suliciu

Viscoplasticitate

Viscoplasticitate

Scanned with OKEN Scanner

Nicolae Cristescu ★ Ion Suliciu

Vîscoplasticitate

Editura tehnică
București

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea prezintă modele vîscoplastice care au fost propuse pentru a descrie comportarea metalelor în diverse procese de deformare, cea mai mare parte fiind consacrată modelelor de tip „rate". Se dau soluții numerice, care se compară cu datele experimentale, precum și unele metode concrete de interpretare a datelor experimentale.

Cuprins: Bazele experimentale pentru fundamentarea teoriei vîscoplasticității (propagarea undelor în cazul unidimensional, experiențe statice și dinamice); Studii numerice pentru determinarea ecuațiilor constitutive (formularea problemei încărcării și descărcării, metode de integrare, exemple numerice); Ecuații constitutive de tip „rate" pentru problema unidimensională (condiții impuse ecuației constitutive de experiențele de reîncărcare dinamică, problema platoului); Ecuații constitutive de tip „rate", cazul general (generalizări formale ale modelului unidimensional, restricții termodinamice asupra ecuațiilor de tip „rate").

Cartea se adresează matematicienilor, mecanicienilor, inginerilor metalurgi, constructori de mașini, constructori, precum și studenților și cadrelor didactice de la universități și institute politehnice din specialitățile menționate.

Face parte din ciclul de lucrări „Mecanică teoretică și aplicată"

Scanned with OKEN Scanner

Prefață

Preocupări de vîscoplasticitate, sau mai precis modele matematice ale mecanicii, numite vîscoplastice, au fost introduse în mecanică prin anii treizeci, în legătură cu descrierea curgerii prin diverși recipienți, canale etc., a unor materiale de tipul pastelor, uleiurilor, noroaielor etc. Unele cercetări sînt chiar mai vechi și au fost introduse pentru a modela fenomenul de fluaj al metalelor. Ulterior, modelele vîscoplastice au fost aplicate la materiale foarte diverse: metale, roci, pămînturi, polimeri, aluaturi etc. De cele mai multe ori problemele studiate au fost considerate cvasistatice.

Reamintim că în teoria clasică a plasticității, așa cum a fost ea dezvoltată începînd cu lucrările lui Barré de Saint-Venant, „timpul" (în sensul obișnuit) nu intervine și deci și proprietățile modelate prin noțiunea „vîscozitate" sînt absente. De abia în ultimii ani se fac eforturi pentru o mai bună modelare a proceselor de deformare plastică în care noțiunea numită vîscozitate să fie de asemenea prezentă. De altfel mai toate cărțile ce prezintă probleme de teoria clasică a plasticității menționează în introducere o listă destul de lungă de experiențe sau fenomene fundamentale (vezi Cap. II) ce principial nu pot fi descrise cu ajutorul teoriilor clasice ale plasticității, dar care sugerează necesitatea introducerii „efectelor de timp".

Din acest punct de vedere, un titlu mai potrivit pentru această carte ar fi fost poate: scurtă introducere în modelarea fenomenologică a corpurilor solide deformabile cu referire specială la probleme dinamice. S-a adoptat totuși titlul mai scurt de vîscoplasticitate, sugerînd cititorului ideea că ne propunem să prezentăm unele modele matematice capabile să descrie proprietățile corpurilor de a se deforma elastic, vîscos și plastic în același timp, așa cum sînt ele sugerate de observațiile experimentale.

Un model matematic capabil să descrie cu acuratețe comportarea materialelor (a oțelurilor de exemplu) la solicitări complexe într-un domeniu larg de variație a temperaturii, la care s-ar atașa o listă a caracteristicelor mecanice (și metalurgice) a fiecărui material (oțel) în parte, împreună cu un calculator electronic, ar permite utilizarea rațională și în deplină siguranță a materialelor, mărimea duratei de funcționare a instalațiilor proiectate, optimizarea proceselor, realizarea unor

Scanned with OKEN Scanner

economii de energie etc. Realizarea unui astfel de program, adică stabilirea unui model matematic împreună cu lista de caracteristici necesară pentru determinarea răspunsului materialului la solicitări complexe precum și stabilirea limitei de valabilitate a modelului, poate părea prea ambițioasă astăzi. Acumularea actuală de informații experimentale, teoretice și studiile numerice permit totuși să se facă primii pași în această direcție.

Această carte în cea mai mare parte a ei își propune să arate cum se construiește un model matematic prin îmbinarea celor trei direcții majore de cercetare — experimentare, modelare numerică a datelor experimentale, teorie — existente astăzi în mecanica mediilor continue, ca de altfel în multe alte ramuri ale științei. Calea propusă constă în următoarele. Se alege o ecuație constitutivă, adică o regulă de a se determina tensiunile (respectiv deformațiile) etc., cînd se cunosc deformațiile (respectiv tensiunile) etc., suficient de generală, care să nu excludă calitativ nici unul din fenomenele observate experimental la scară macroscopică într-un anumit interval de variație a temperaturii. Aceste ecuații trebuie să fie alese astfel încît să nu fie în contradicție cu legile generale ale mecanicii și termodinamicii. Din acest punct de vedere sînt discutate în capitolele V și VI două tipuri de ecuații constitutive.

Observațiile generale, de natură experimentală, că orice perturbații se propagă prin corp cu o viteză finită și că există stări de echilibru (adică stări de tensiune, deformație, temperatură, energie etc., constante în timp) în care corpul poate să stea atîta timp cît nu intervin perturbații exterioare, sînt folosite în Cap. VII pentru a preciza și mai mult structura matematică a modelului.

În continuare pentru precizarea ecuațiilor constitutive ar trebui studiate restricțiile impuse asupra lor de alte observații experimentale cu caracter general, de exemplu însușirile metalelor de a avea proprietăți de deformare prin fluaj, sau de relaxare, sau de ecruisare etc. Odată aceste restricții impuse ecuațiile constitutive ar căpăta o formă mult mai precisă avînd încă proprietatea de a descrie corect comportările la solicitări complexe. Apoi ar urma determinarea cantitativă a ecuației constitutive pentru fiecare material în parte prin determinarea mărimilor caracteristice necesare. Rolul principal în această

Scanned with OKEN Scanner

fază îl joacă cercetările experimentale și cele de modelare numerică prin relații empirice a datelor experimentale. Datorită complexității problemelor experimentale și de calcul precum și a celor teoretice, acest program nu a fost urmărit în detaliu pentru cazul general tridimensional, acestea rămînînd probleme deschise de mare viitor pentru toate cele trei direcții de cercetare ale mecanicii continuului.

Programul descris mai sus a fost urmărit mult mai amănunțit pentru cazul proceselor de deformare unidimensională, la o temperatură ambiantă dată, adică pentru acele procese ce pot fi descrise cu o singură coordonată spațială și utilizînd o singură componentă a tensiunii și a deformației. Aceasta se datorează faptului că datele experimentale referitoare la un material dat în cazul unidimensional, publicate în literatura de specialitate, sînt mult mai detaliate, precum și faptului că metodele numerice pentru integrarea ecuațiilor hiperbolice cvasiliniare în două variabile independente sînt mult mai bine puse la punct. Capitolul II descrie unele experiențe care au pus în evidență din punct de vedere calitativ proprietățile materialelor care s-au dovedit a avea un cadru larg de valabilitate, fiind cruciale pentru dezvoltările teoretice ulterioare. Capitolul III reprezintă un model de cercetare numerică. Se pun în evidență lipsurile modelului clasic descris la Cap. I, §1 în opoziție cu modelul de tip „rate" prin comparație cu măsurătorile experimentale efectuate pe aluminiu. Se arată interdependența dintre fiecare termen din ecuația constitutivă și mărimile măsurate experimental. Se descoperă existența unei frontiere de relaxare dinamică, adică a unei curbe dinamice de echilibru care este în general diferită de curba cvasistatică de echilibru. Capitolul IV arată cum unele rezultate experimentale cu caracter general pot fi transformate în axiome matematice care trebuie apoi să fie satisfăcute de ecuația constitutivă. Astfel în §1 al Cap. IV, o axiomă rezultată din experiențe dinamice de reîncărcare prezice existența frontierei de relaxare dinamică. Presupunînd că frontiera de relaxare a fost determinată experimental, în §4 se arată cum pot fi folosite aceste rezultate experimentale pentru a preciza și mai mult structura funcțiilor φ și ψ, coeficienții din ecuația constitutivă de tip rate.

În Capitolul I se face un scurt istoric al dezvoltării modelului unidimensional, descriindu-se și tabloul propagării un-

Scanned with OKEN Scanner

delor elastice și plastice într-o bară finită, atunci cînd este utilizată o teorie clasică de plasticitate. În Cap. VIII sînt prezentate unele generalizări formale ale modelului unidimensional elasto-vîscoplastic. Ca exemplu de posibilă utilizare a unui model de tip rate la un proces rapid de deformare în care forțele de inerție sînt totuși neglijate, în Cap. IX este dată o teorie de trefilare (sau tragere) în care se utilizează o ecuație constitutivă de tip Bingham. Aceasta este o problemă tradițională a teoriei plasticității, pentru care s-au dat în decursul anilor multe soluții aproximative ce nu țin seama de efectul vitezei de lucru. În acest capitol se arată că folosind o teorie de tip rate, viteza de lucru intervine ca unul din parametrii esențiali ai procesului. Teoria expusă poate fi considerată drept model pentru formularea teoriei altor procese de prelucrare.

Cartea se adresează studenților, inginerilor și cercetătorilor interesați în aspectele teoretice sau aplicate ale teoriei plasticității sub forma ei actuală. Cunoștințele de matematică necesare pentru urmărirea textului lucrării sînt de nivelul unui absolvent de institut tehnic de învățămînt superior. Se presupune de asemenea că cititorul posedă unele cunoștințe generale de mecanica mediilor continue deformabile. Pentru ușurința urmăririi textului în Anexele 2 și 3 sînt prezentate pe scurt legile generale de conservare pentru cazul unidimensional și tridimensional.

Capitolele I — IV, după cum s-a mai spus, tratează numai probleme unidimensionale. Capitolele I și II pot fi citite independent.

Cartea a fost pregătită pentru tipar după cum urmează: Capitolele I, II, paragrafele 1—2 din Cap. III, Cap. IX și Anexa 1 au fost redactate de N. Cristescu. Capitolele IV, V, VI și VII și Anexele 2 și 3 au fost redactate de I. Suliciu. Paragraful 3 din Cap. III și Cap. VIII au fost redactate împreună. Firește că tot textul cărții a fost urmărit în detaliu de către ambii autori și el este bazat în mare măsură pe lucrările celor doi autori.

Autorii doresc să mulțumească lui dr. Cornelia Cristescu pentru ajutorul deosebit pe care l-a dat în pregătirea manuscrisului cît și pentru efectuarea calculelor numerice, precum și lui dr. M. Mihăilescu pentru observațiile critice făcute asupra diferitelor părți ale manuscrisului acestei cărți.

Scanned with OKEN Scanner

Cuprins

Capitolul I. **Scurt istoric al ecuațiilor constitutive** 11
1. Teoria lui Kármàn, Taylor, Rahmatulin 11
2. Teoria plasticității de tip rate 20

Capitolul II. **Bazele experimentale utilizate pentru fundarea teoriei** 30

1. Experiențe statice 30
2. Experiențe dinamice cu bare lovite longitudinal 38
3. Experiențe de reîncărcare 43
4. Efectul Portvin — Le Chatelier 49
5. Experiențe dinamice cu plăci 51

Capitolul III. **Studii numerice pentru determinarea ecuațiilor constitutive** 55
1. Ecuațiile constitutive sub forma utilizată în calcule numerice 55
2. Condiții inițiale și la limită 61
3. Unde de șoc 63
4. Exemple numerice 72
5. Compararea diverselor modele 86
6. Concluzii 91

Capitolul IV. **Ecuații constitutive de tip „rate" pentru problema unidimensională** 96
1. Condiții impuse asupra ecuației constitutive de tip rate de experiențele dinamice de reîncărcare 96
2. Mișcări staționare ale materialelor cu comportare de tip rate 101
3. Asupra soluției ecuației diferențiale (4.1.2) pentru materiale cu comportare de tip rate 111
4. Consecințe ale presupunerilor constitutive P.C.I și P.C.II 122
5. Observații asupra existenței „platoului" în plasticitatea dinamică 127

Capitolul V. **Descrierea comportării neelastice cu ajutorul variabilelor interne de stare** 148
1. Restricții termodinamice asupra ecuațiilor constitutive pentru materiale cu variabile interne de stare 148

Scanned with OKEN Scanner

2. Restricții termodinamice asupra părții disipative a ecuațiilor constitutive 153
3. Principiul invarianței răspunsului materialului la schimbările de reper. Grupul de izotropie al materialului 158
4. Consecințe ale restricțiilor impuse asupra energiei libere specifice 164
5. Modele elasto-vîsco-plastice cu variabile interne de stare 169
6. Teorii unidimensionale de plasticitate cu variabile interne de stare 172

Capitolul VI. **Termodinamica ecuațiilor constitutive de tip rate** 175

1. Restricții termodinamice asupra ecuațiilor constitutive de tip rate. Cazul unidimensional 175
2. Răspuns instantaneu pentru materiale cu comportare de tip rate. Cazul unidimensional 180
3. Ecuații constitutive de tip rate pentru cazul tridimensional 185
4. Stări total relaxate 191

Capitolul VII. **Propagări de unde în materiale cu variabile interne de stare** 197

1. Introducere 197
2. Unde simetrice de accelerație 200
3. Stări de echilibru tare. Condiția de elipticitate 205
4. Unde reale de accelerație 207
5. Fluxul de căldură în vecinătatea unei stări de echilibru tare 210
6. Teoria liniară 212
7. Unde de șoc 217

Capitolul VIII. **Unele ecuații constitutive folosite în viscoplasticitatea clasică** 221

1. Modelul rigid vîscoplastic al lui Bingham 221
2. Modelul elasto-vîscoplastic 224
3. Modelul cvasiliniar 228

Capitolul IX. **Aplicații la prelucrarea metalelor: teoria tragerii** 229

1. Introducere 229
2. Ecuațiile de bază 232
3. Legile de frecare 237
4. Teorema asupra puterii totale 242
5. Tensiunea de tragere 247
6. Exemple numerice și comparație cu date experimentale 252
7. Observații 257
8. Concluzii 264

Anexa 1. **Metode numerice de integrare și programe pentru calculator utilizate pentru studiul datelor experimentale** 266

1. Introducere 266
2. Formularea problemei 267

Scanned with OKEN Scanner

3. Principiul metodei iterative 268
4. Descrierea descărcării 273
5. Condiții la limită 273
6. Schema logică 276
7. Observații referitoare la cazul RI 279
8. Alte variante ale metodei caracteristicilor 281
9. Observații 284

Anexa 2. **Elemente de teoria propagării undelor unidimensionale** .. 285

Anexa 3. **Ecuațiile generale de conservare și elemente de teoria propagărilor de unde** 291

Bibliografie 297

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

Scurt istoric al ecuațiilor constitutive

§1. Teoria lui Kármàn, Taylor, Rahmatulin

Principala problemă care a atras atenția asupra necesității considerării în teoria plasticității și a proprietății de vîscozitate, adică necesitatea considerării ecuațiilor constitutive vîsco-plastice, a fost problema propagării undelor plastice. Această problemă a fost considerată în primul rînd pentru propagarea undelor plastice longitudinale în bare subțiri de către G.I. Taylor [1946], H.A. Rahmatulin [1945] și Th. von Kármàn [1950] și apoi de mulți autori pentru multe alte probleme, în special cele „unidimensionale" (vezi Cristescu [1967]). Vom începe prin a expune pe scurt această teorie.

Pentru probleme unidimensionale, ecuația de mișcare este

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial X} \tag{1.1.1}$$

(vezi Anexa 1). Autorii menționați mai sus au atașat acestei ecuații condiția de compatibilitate

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{1.1.2}$$

și o ecuație constitutivă scrisă sub forma

$$\sigma = f(\varepsilon) \tag{1.1.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

care caracterizează proprietățile mecanice ale materialului, atunci cînd se efectuează o primă experiență asupra lui. În (1.1.3) f este o funcție monoton crescătoare și în general

$$+\infty > f'(\varepsilon) > 0$$

$$f''(\varepsilon) \begin{cases} \leqslant 0 & \text{dacă} \quad \varepsilon \geqslant 0 \\ \geqslant 0 & \text{dacă} \quad \varepsilon \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Pentru multe materiale funcția f este simetrică față de origine. Nu vom considera aici cazul modelului perfect plastic cînd pentru un anumit interval de variație a lui ε avem $f' = 0$ și nici cazul materialelor ce se compactifică și se închid (locking) cînd $f' \to +\infty$.

Dacă se introduce deplasarea u prin

$$x(X, t) = X + u(X, t)$$

din (1.1.1) și (1.1.3) se obține

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \tag{1.1.5}$$

cu

$$c^2(\varepsilon) = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \tag{1.1.6}$$

care este numită „viteza de propagare" a undelor. Ținînd seama de (1.1.4) rezultă imediat că (1.1.5) este o ecuație cvasiliniară de tip hiperbolic. Pentru materialele perfect plastice $c(\varepsilon) = 0$ iar pentru materialele ce se „închid" atunci cînd $f' \to +\infty$, $c(\varepsilon) \to +\infty$ iar ecuația (1.1.5) are un caracter parabolic.

Uneori este convenabil să se elimine tensiunea din (1.1.1), (1.1.2) și (1.1.3) și să se considere în locul ecuației (1.1.4) sistemul echivalent

$$IU_t + AU_x = 0 \tag{1.1.7}$$

unde indicii inferiori înseamnă derivare în raport cu variabilele menționate și

$$U = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ v \end{Bmatrix} \qquad A = \begin{Bmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{Bmatrix} \qquad I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Direcțiile caracteristice se obțin calculînd valorile proprii ale matricei A

$$|A - \lambda I| = 0$$

Se obțin două valori $\lambda_1 = c$ și $\lambda_2 = -c$. Este util să se calculeze și vectorii proprii corespunzători. Astfel din

$$l^\alpha A = \lambda_\alpha l^\alpha \qquad \text{(fără sumare pentru } \alpha\text{)}$$

se obțin vectorii proprii la stînga

$$l^1 = \{c_1, -1\}, \qquad l^2 = \{c_1, +1\}.$$

Acum, înmulțind la stînga (1.1.7) cu l^α se obține acest sistem sub forma

$$l_1^\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_\alpha} + l_2^\alpha \frac{\partial v}{\partial s_\alpha} = 0 \tag{1.1.8}$$

unde $\frac{\partial}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial X}$ este derivata în direcția λ_α. Prin tradiție aceste derivate se notează mai simplu cu litera d.

Ecuațiile caracteristicilor sînt

$$\frac{dX}{dt} = \pm c(\varepsilon) \tag{1.1.9}$$

iar relațiile diferențiale (1.1.8) satisfăcute de-a lungul lor sînt respectiv

$$dv = \pm c(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{1.1.10}$$

sau sub formă echivalentă

$$dv = \pm \frac{d\sigma}{\rho c(\sigma)} \tag{1.1.11}$$

dacă se utilizează și (1.1.3) și notația menționată mai sus.

Relația (1.1.3) este aplicată atît timp cît tensiunile sînt crescătoare (în cadrul unei experiențe în care mereu $\sigma \geqslant 0$). În momentul cînd tensiunile încep pentru prima oară să descrească este aplicată legea lui Hooke

$$\sigma = \sigma_m + E[\varepsilon - \varepsilon_m] \tag{1.1.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\sigma_m(X,t) = \max_{t_0 \leqslant s \leqslant t} \sigma(X, s)$$

și

$$\varepsilon_m(X, t) = \max_{t_0 \leqslant s \leqslant t} \varepsilon(X, s) \tag{1.1.13}$$

sînt maximele lui σ și ε în punctul X considerat, t_0 este momentul cînd a început încărcarea iar E este o constantă numită modulul lui Young. O relație liniară de același tip

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.1.14}$$

este aplicată la începutul experienței, adică f din (1.1.3) are forma (1.1.14) cînd tensiunile sînt mici $|\sigma| < \sigma_Y$, unde $\sigma_Y > 0$ este limita de plasticitate la întindere și este o constantă a materialului determinată prin experiențe standardizate. Prin urmare dacă

$$\sigma = \sigma_m \tag{1.1.15}$$

zicem că avem o *încărcare* și aplicăm (1.1.3), iar dacă

$$\sigma \leqslant \sigma_Y \text{ sau } \sigma < \sigma_m \tag{1.1.16}$$

zicem că avem o *descărcare* și aplicăm (1.1.12).

Uneori relația (1.1.12) se poate aplica pînă cînd tensiunea devine nulă. În acest caz ea poate fi utilizată pentru calculul deformației plastice (ireversibile)

$$\varepsilon_p = \varepsilon_m - \frac{\sigma_m}{E} \tag{1.1.17}$$

În general, atît în timpul încărcării cît și în timpul descărcării avem

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \tag{1.1.18}$$

cu

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \tag{1.1.19}$$

partea elastică a deformației (fig. 1.1.1). Tot relația (1.1.12) se utilizează și în cazul unei reîncărcări pornind de la o stare elastică oarecare de pe (1.1.12). În timpul reîncărcării cît

Scanned with OKEN Scanner

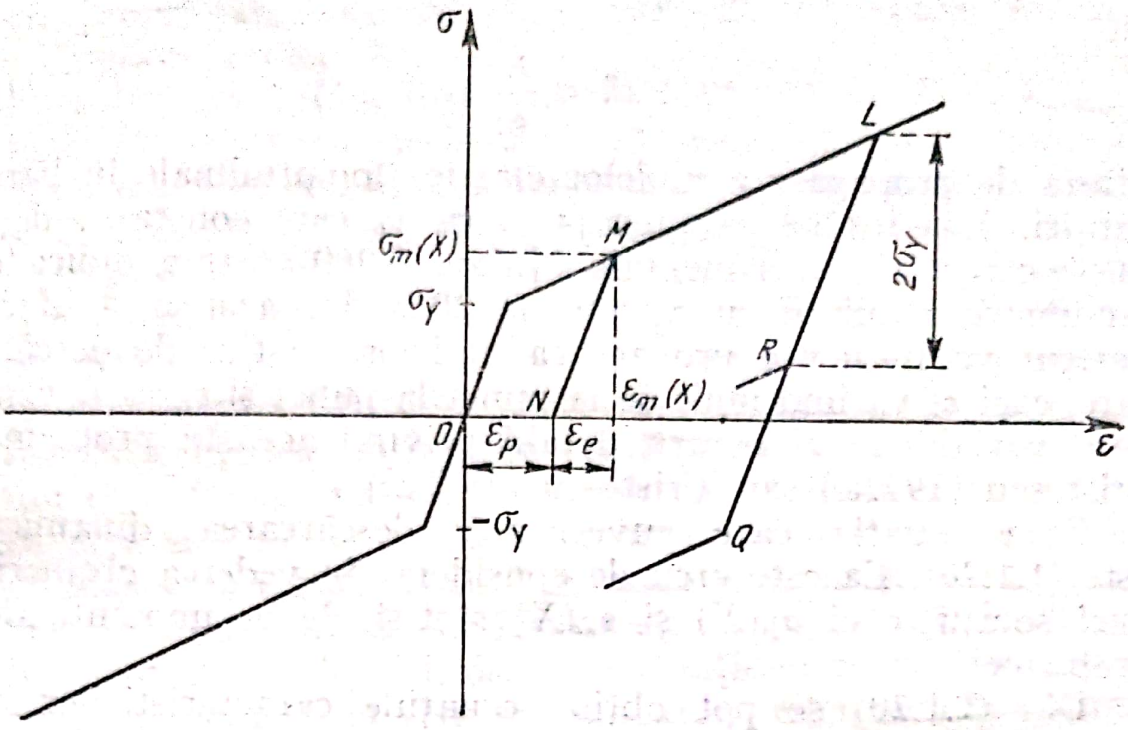


Fig. 1.1.1.

timp $\sigma < \sigma_m$ va fi utilizată (1.1.12) iar atunci cînd se atinge maximul anterior atins $\sigma = \sigma_m$ și apoi pentru tensiuni crescătoare va fi din nou utilizată (1.1.3).

Există cazuri cînd relația (1.1.12) nu poate fi aplicată decît la începutul procesului de descărcare. De exemplu dacă descărcarea începe din punctul L (fig. 1.1.1), unde deformația plastică este mare, atunci în timpul descărcării deformațiile plastice în sens opus pot să apară încă înainte ca tensiunea să atingă valoarea $-\sigma_Y$ în punctul Q (efectul Bauschinger). Dacă deformațiile plastice în sens opus apar încă în punctul R unde $\sigma_R = \sigma_m(X) - 2\sigma_Y$ atunci se zice că descriem un efect Bauschinger idealizat. Acesta este un model idealizat, ușor de considerat în cazul încărcărilor repetate în sensuri diferite, căci domeniul elastic de variație a tensiunilor este constant și egal cu $2\sigma_Y$.

În prezenta lucrare de cele mai multe ori se va considera o singură încărcare pornind de la $\sigma = \varepsilon = 0$ conform cu (1.1.3), urmată de o descărcare conform cu (1.1.12) pînă la $\sigma = 0$. Din (1.1.12) și (1.1.1) rezultă ecuația de mișcare în domeniul descărcării

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\mathrm{d}\sigma_m(X)}{\mathrm{d}X} - c_0^2 \frac{\mathrm{d}\varepsilon_m(X)}{\mathrm{d}X} \qquad (1.1.20)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu

$$c_0^2 = \frac{E}{\rho_0} \tag{1.1.21}$$

viteza de propagare a undelor elastice longitudinale în bare subțiri. Mai jos se va presupune că c_0 este constant, deși unele cercetări experimentale (Jukov [1960]) par a indica o diminuare a lui E cu ε_p pînă la 20%. Un asemenea efect desigur va influența propagarea undelor elastice de descărcare, căci ε_p variind mult de la punct la punct și c_0 va deveni și el variabil (vezi pentru detalii privind această problemă Cristescu [1972a] sau Cristescu [1975a]).

Deci ecuația care guvernează descărcarea dinamică este (1.1.20). Ea este greu de considerat în vederea obținerii unei soluții, căci $\sigma_m(X)$ și $\varepsilon_m(X)$ sînt și ele necunoscute ale problemei.

Din (1.1.20) se pot obține ecuațiile caracteristicilor și ale relațiilor diferențiale satisfăcute de-a lungul lor în domeniul de descărcare

$$\frac{dX}{dt} = \pm c_0 \tag{1.1.22}$$

și

$$dv = \pm \frac{d\sigma}{\rho c_0}. \tag{1.1.23}$$

Prin urmare, dacă problema propagării undelor plastice este studiată cu ajutorul modelului plasticității clasice conform căruia o ecuație constitutivă scrisă sub forma (1.1.3) este aplicată în timpul încărcării și legea lui Hooke în timpul descărcării, în planul caracteristic vor exista regiuni în care este aplicată ecuația (1.1.5) (aceste regiuni vor fi notate cu L) și alte regiuni în care mișcarea este guvernată de (1.1.20) (aceste regiuni vor fi notate cu U). Frontierea care desparte aceste regiuni va fi numită frontierea încărcare/descărcare, sau pe scurt frontierea L/U și este și ea a priori necunoscută (vezi pentru detalii Cristescu [1967]). Frontiera L/U depinde desigur de condițiile inițiale și la limită dar și de proprietățile materialului (de (1.1.3) și (1.1.12)). Deoarece în fiecare punct X în momentul începerii procesului de descărcare deformația își atinge maximul relativ $\varepsilon_m(X)$, frontiera L/U se poate defini ca curba din planul caracteristic

Scanned with OKEN Scanner

cu proprietatea că pe ea deformația își atinge maximul în fiecare punct X.

Frontiera L/U a fost pusă în evidență de H. A. Rahmatulin [1945] și din această cauză poartă uneori numele lui. Ea a mai fost considerată independent și de Th. von Kármàn și P. Duwez [1950] și de G. I. Taylor [1946]. Pentru condiții inițiale și la limită oarecare, legi constitutive (1.1.3) oarecare și corpuri de dimensiuni finite (deci considerînd și reflectări de unde), frontiera L/U se poate obține doar prin metode numerice (vezi Cristescu [1970] sau Anexa 1). În principiu, frontiera L/U se obține din condiția ca soluția din L și cea din U să fie compatibile cu condițiile la limită și cu condiția ca σ, ε și v să fie continue la traversarea frontierei. Odată cu obținerea frontierei L/U se obține desigur și toată soluția atît în domeniul de încărcare cît și în cel de descărcare. Nu vom da detalii aici, dar vom menționa doar unele aspecte tipice ale soluției în vederea comparării ei cu soluția obținută cu alte ecuații constitutive.

Pentru exemplificare să considerăm cazul lovirii simetrice și longitudinale a două bare identice (Cristescu [1970]). Ecuația constitutivă a fost aleasă sub forma

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon \qquad \text{dacă} \quad \sigma \leqslant \sigma_Y \\ \sigma &= \beta(\varepsilon + \varepsilon_0)^{1/2} \quad \text{dacă} \quad \sigma \geqslant \sigma_Y \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

unde β și ε_0 sînt constante ale materialului (vezi Cap. III). Dacă una din bare este în repaus iar cealaltă o lovește cu viteza V, un tablou tipic al propagării undelor este dat în planul caracteristic (fig. 1.1.2). În acest exemplu viteza de lovire este $V = 14{,}98$ m/s iar bara de diametru $D = 2{,}5$ cm. este de lungime $l = 10\ D$. Prima undă elastică $X = c_0 t$ se reflectă de la capătul liber $X = l$ și se întoarce ca o undă de descărcare și de întindere. În apropiere de capătul lovit $X = 0$ în intervalul $0 \leqslant t \leqslant 2l/c_0$ este cert că nici o undă reflectată de la capătul liber nu va ajunge în apropierea acestui capăt. Deci deasupra caracteristicii $X = c(\sigma_{max})\ t$ va exista o regiune de stare constantă unde $v = v_{max} = V/2$, $\sigma = \sigma_{max}$ și $\varepsilon = \varepsilon_{max}$, aceste valori putînd fi obținute cu ușurință din condițiile la limită și (1.1.10) sau (1.1.11). Această regiune de stare constantă este tipică pentru soluția obținută

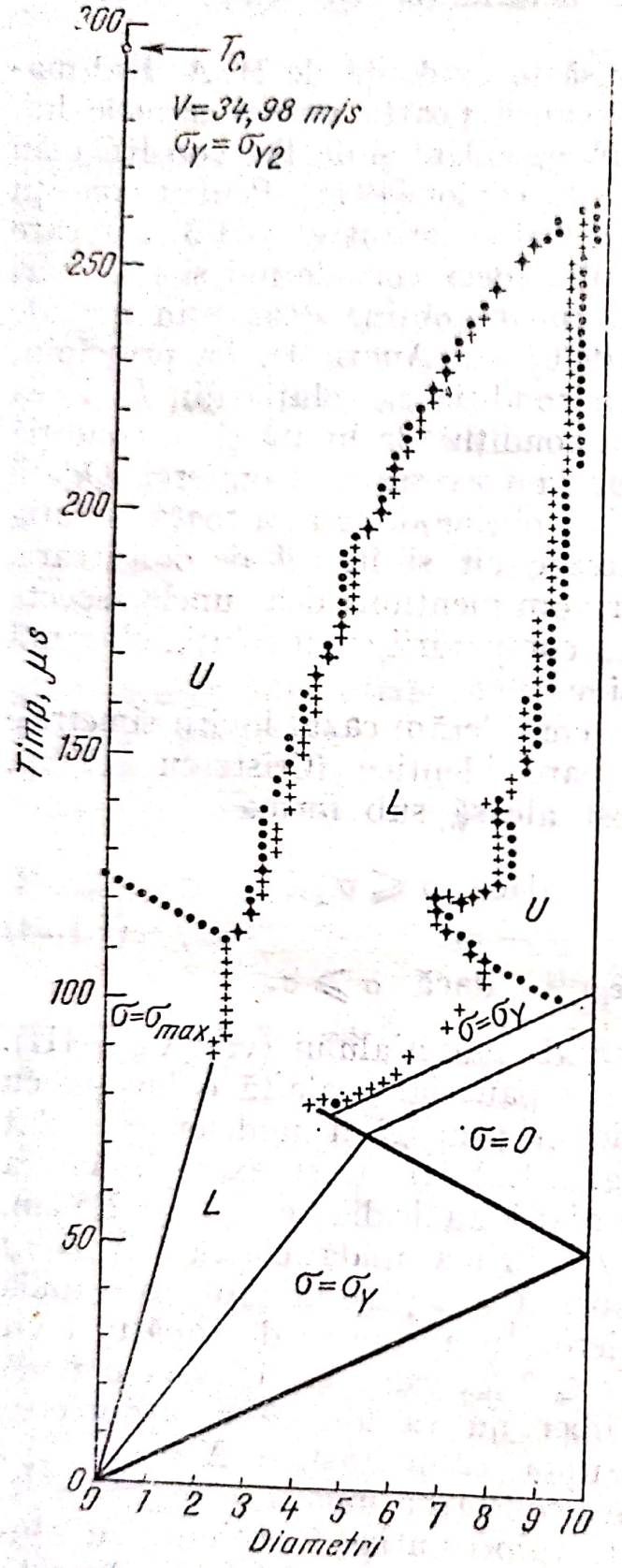


Fig. 1.1.2

cu ecuații constitutive de tipul (1.1.3). Odată cu începerea procesului de descărcare această stare constantă încetează, chiar de-a lungul unei porțiuni a frontierei L/U.

O altă regiune de stare constantă este domeniul cuprins între caracteristicile

$$X = c_0 t, \quad X = c(\varepsilon_Y)\, t,$$

$$X = -\, c_0 \left(t - \frac{2l}{c_0} \right).$$

În domeniul L se propagă unde plastice iar în domeniul U doar unde elastice de descărcare. Frontiera L/U indicată prin puncte a fost obținută prin metode numerice cu calculatorul. În figură T_c este timpul cît cele două bare sînt în contact și a fost de asemenea obținut prin calcul.

Soluția în domeniul de încărcare și descărcare se poate reprezenta în diverse moduri. Este util însă să fie date chiar acele aspecte ale soluției care să poată fi apoi comparate cu datele experimentale. De exemplu variația deformației în

Scanned with OKEN Scanner

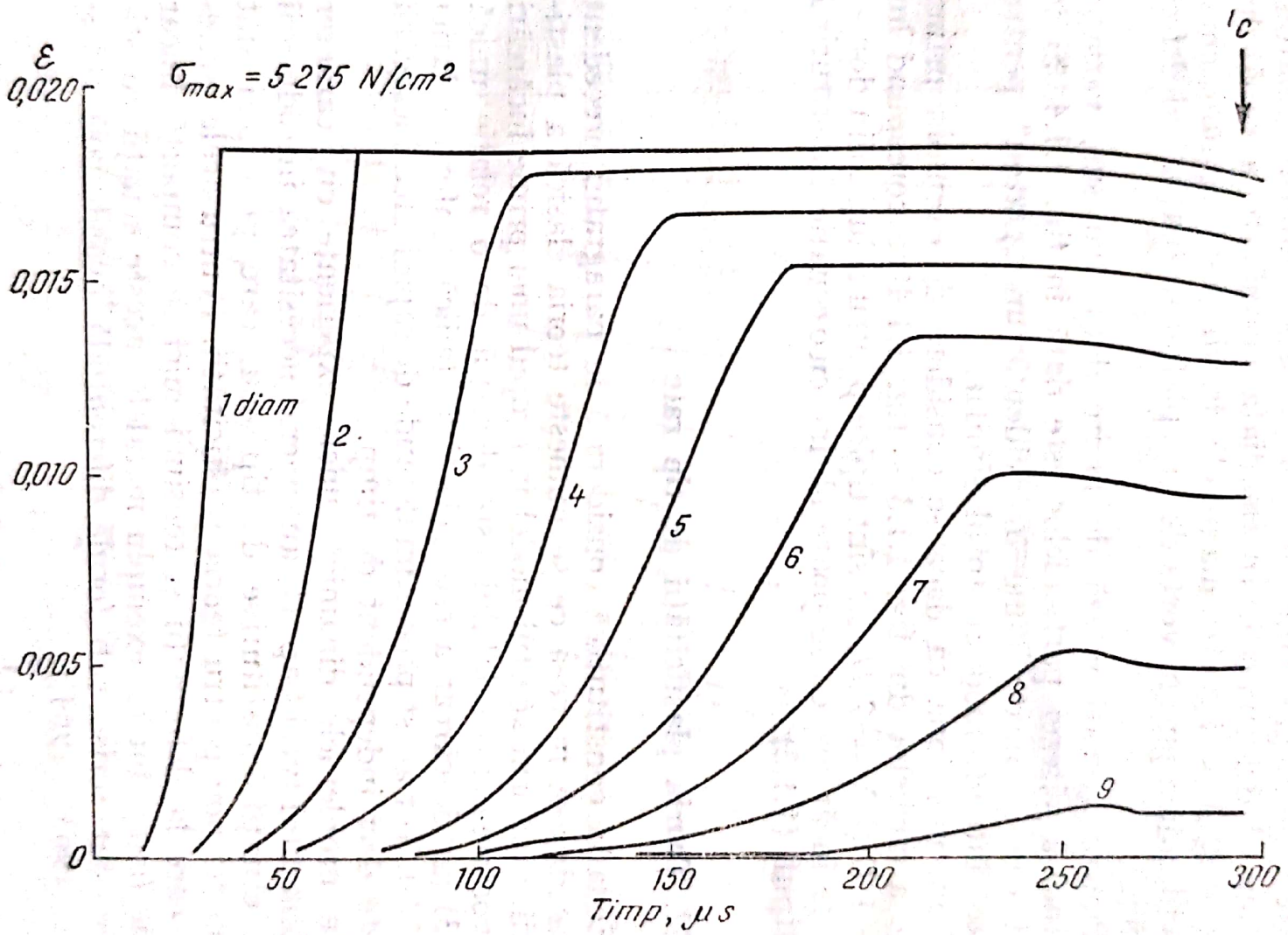


Fig. 1.1.3

Scanned with OKEN Scanner

timp la diverse secțiuni de-a lungul epruvetei este dată în fig. 1.1.3. De remarcat că în apropiere de capătul lovit după atingerea maximului deformația rămîne un timp relativ îndelungat constantă. Este așa numitul „platou" în timp al deformației. În imediata vecinătate a capătului lovit $0 \leqslant X < 2{,}5\ D$, maximele la diverse secțiuni chiar coincid, adică putem vorbi de un „platou în spațiu" al deformației.

Pentru aceeași viteză de lovire dată mai sus, variația în timp a vitezei particulelor este dată în fig. 1.1.4. Și în acest caz se poate pune în evidență un „platou" pentru viteze, într-un mod cu totul similar.

Vom menționa că dacă se consideră de exemplu prima parte a curbelor din fig. 1.1.3 și fig. 1.1.4 ce corespund lui $X = 1\ D$ și $X = 2\ D$, ele sînt tipice pentru soluția din domeniul de încărcare ce se poate obține cu o ecuație constitutivă de tipul (1.1.3).

§2. Teoria plasticității de tip rate

Ecuația constitutivă considerată în paragraful precedent se încadrează în ceea ce se numește teoria clasică a plasticității. Conform acestui model în timpul unei prime încărcări comportarea materialului este descrisă de o relație unică (1.1.3) iar descărcarea este „elastică" (adică conform relației (1.1.12)). Tot acest proces nu depinde de rapiditatea încărcării și este deci independent de timp.

În problemele dinamice, unele experiențe cu caracter fundamental (vezi Cap. II) au sugerat necesitatea introducerii unor ecuații constitutive de tip nou, care principial sînt un model nou pentru teoria plasticității. Pentru acele materiale care la deformații și tensiuni mici se comportă linear elastic (cum sînt de exemplu metalele) aceste ecuații constitutive sînt scrise sub formă diferențială cvasiliniară (Cristescu [1963] [1964])

$$\dot{\varepsilon} = \left[\frac{1}{E} + \Phi(\sigma, \varepsilon)\right] \dot{\sigma} + \Psi(\sigma, \varepsilon). \qquad (1.2.1)$$

Pentru acele materiale cum sînt masele plastice, cauciucurile etc., pentru care pentru orice mărime a deformațiilor compor-

Scanned with OKEN Scanner

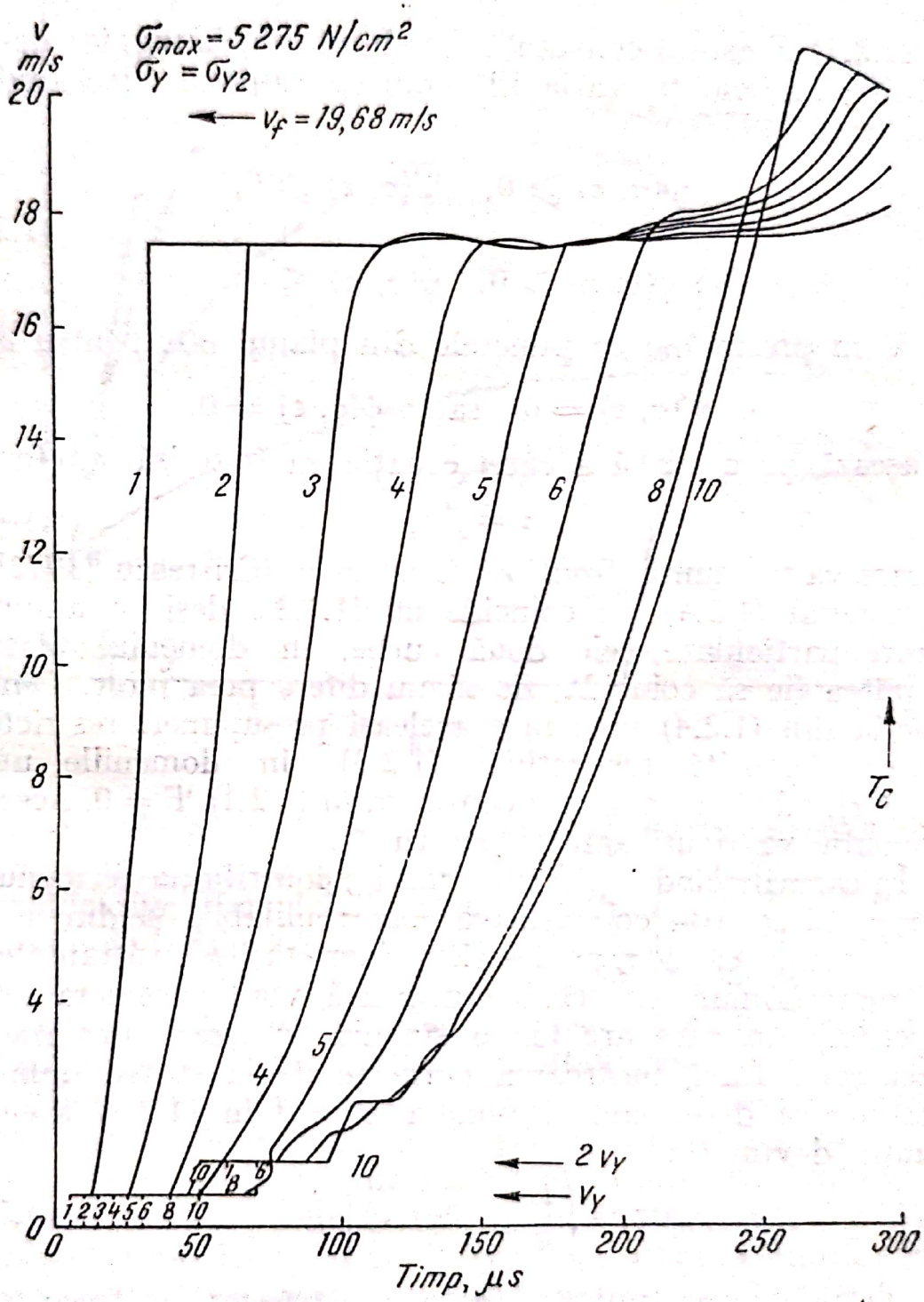

v
m/s
$\sigma_{max} = 5\,275\ N/cm^2$
$\sigma_Y = \sigma_{Y2}$
$v_f = 19{,}68\ m/s$
20
18
16
14
12
10
8
6
4
0
1
2
3
4
5
6
8
10
T_C
$2\,v_Y$
v_Y
0
50
100
150
200
250
300
Timp, μs

Fig. 1.1.4

tarea este neliniară, ecuația constitutivă se scrie sub forma (Cristescu [1963])

$$\dot{\sigma} = \varphi(\sigma, \varepsilon)\ \dot{\varepsilon} + \psi(\sigma, \varepsilon). \tag{1.2.2}$$

În (1.2.1) E este o constantă (modulul lui Young) iar despre ceilalți coeficienți variabili vom presupune deocamdată (Cristescu [1967]),

$$\begin{gathered} \Phi(\sigma, \varepsilon) \geqslant 0, \quad \Psi(\sigma, \varepsilon) \geqslant 0, \\ \varphi(\sigma, \varepsilon) \geqslant 0, \quad \psi(\sigma, \varepsilon) \leqslant 0 \end{gathered} \tag{1.2.3}$$

Vom presupune că punctele din planul $\sigma 0 \varepsilon$ pentru care

$$\Psi(\sigma, \varepsilon) = 0 \quad \text{sau} \quad \psi(\sigma, \varepsilon) = 0$$

se așează pe o curbă a cărei ecuație va fi scrisă sub forma

$$\sigma = f(\varepsilon) \tag{1.2.4}$$

și care va fi numită *frontieră de relaxare* (Cristescu [1972b]). În general (1.2.4) nu coincide cu (1.1.3), deși în anumite cazuri particulare cele două curbe, în domeniul plastic, ar putea fie să coincidă, fie să nu difere prea mult. Pentru funcția din (1.2.4) vom face aceleași presupuneri restrictive (1.1.4). Datorită restricțiilor (1.2.3), în domeniile unde $\sigma < f(\varepsilon)$, adică $\Psi < 0$ vom considera în (1.2.1) $\Psi = 0$. Aceeași convenție va fi utilizată și pentru Φ.

În cazurile cînd $\dot{\varepsilon}$ și $\dot{\sigma}$ sînt „mari", contribuția termenului $\Psi(\sigma, \varepsilon)$ în ecuația constitutivă este neglijabilă și din acest motiv zicem că $\Phi(\sigma, \varepsilon)$ descrie proprietățile „instantanee" ale materialului. În cele ce urmează vom considera acele experiențe în care are loc o singură încărcare urmată de descărcare. Dacă încărcarea pornește de la starea nulă de tensiune și deformare și punem $\Psi = 0$ în (1.2.1) această ecuație devine

$$d\varepsilon = \left[\frac{1}{E} + \Phi(\sigma, \varepsilon)\right] d\sigma. \tag{1.2.5}$$

Ea definește așa numita *curbă instantanee* ce trece prin $\sigma = \varepsilon = 0$ (fig. 1.2.1) și este uneori tangentă dreptei lui Hooke

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.2.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

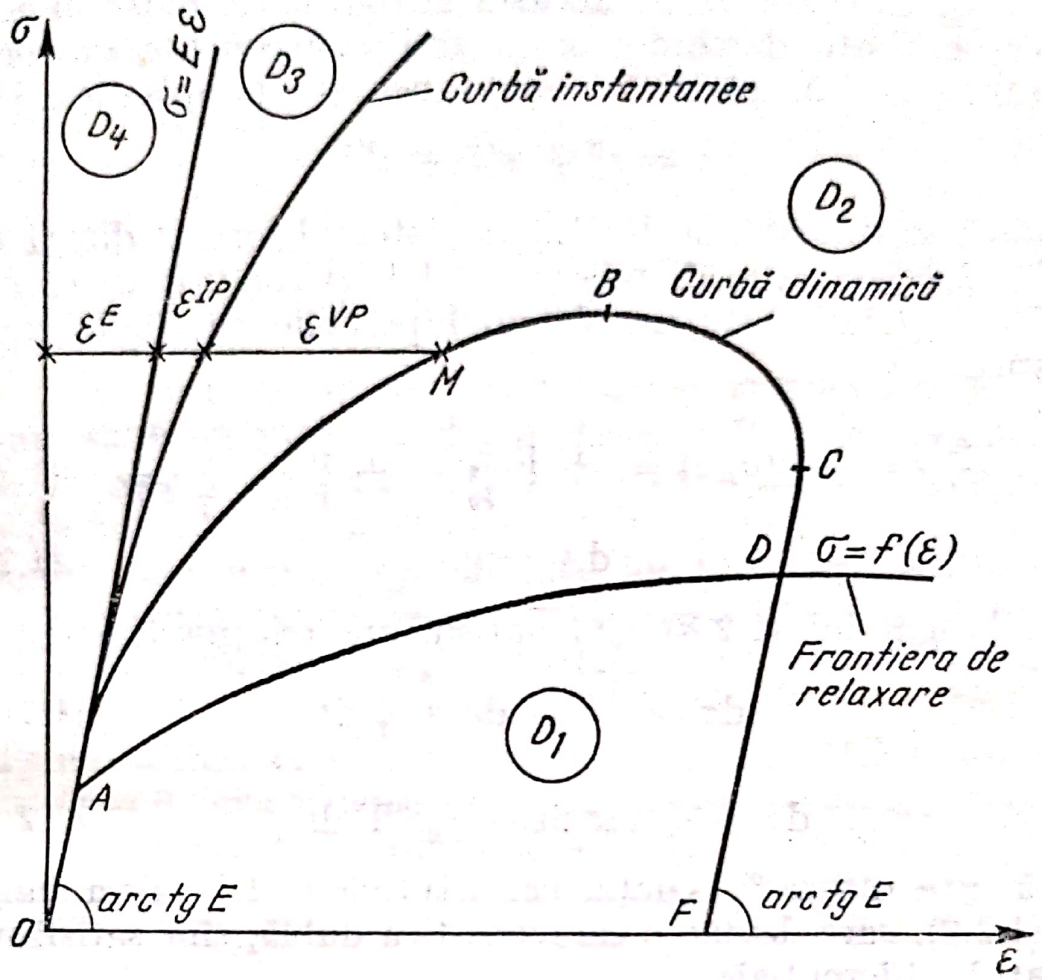


Fig. 1.2.1

sau coincide pe o porțiune cu ea. Cu ajutorul curbelor menționate mai sus se pot pune în evidență diverse domenii semnificative (fig. 1.2.1). Punctele din D_1 și D_2 sînt stări posibile de tensiune și deformație. Dacă $\Phi > 0$ atunci domeniile D_3 și D_4 nu au o semnificație fizică. În anumite situații particulare cazul $\Phi = 0$ (cînd D_3 lipsește) va fi de asemenea considerat. Nu vom exclude posibilitatea ca în anumite experiențe cu loviri foarte rapide panta curbei instantanee (1.2.5) să fie mai mare decît panta dreptei lui Hooke așa cum este ea obținută în experiențe obișnuite (statice sau dinamice cu loviri nu prea rapide), totuși mai jos panta dreptei lui Hooke va fi considerată ca o pantă limită pentru panta curbei instantanee (1.2.5); deci $\Phi(\sigma, \varepsilon) \geqslant 0$ iar E este modulul lui Young în sens obișnuit.

În fig. 1.2.1 o posibilă soluție a lui (1.2.1) a fost reprezentată sub numele de „curba dinamică". Dacă se consideră

un punct oarecare M pe această curbă, deformația în acest punct se poate descompune în trei componente ce vor fi numite: elastică, plastică instantanee și vîscoplastică. Deci

$$\varepsilon = \varepsilon^E + \varepsilon^{IP} + \varepsilon^{VP}. \tag{1.2.7}$$

Dacă se ține seama de (1.2.3), sistemul format din (1.2.1) (sau (1.2.2)), ecuația de mișcare (1.1.1) și condiția de compatibilitate (1.1.2), este un sistem hiperbolic cu liniile caracteristice

$$\frac{dX}{dt} = \pm c(\sigma, \varepsilon) = \pm \sqrt{\frac{\varphi}{\rho_0}} = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1 + E\Phi)}} \tag{1.2.8}$$

$$dX = 0. \tag{1.2.9}$$

De-a lungul lui (1.2.8) sînt satisfăcute relațiile diferențiale

$$d\sigma = \pm \rho_0 c\, dv + \psi\, dt \tag{1.2.10}$$

sau

$$d\sigma = \pm \rho_0 c\, dv - \rho_0 c^2 \Psi\, dt. \tag{1.2.11}$$

Dacă este utilizată ecuația constitutivă (1.2.1), de-a lungul lui (1.2.9), care devine o caracteristică dublă, sînt satisfăcute ecuațiile diferențiale

$$\begin{aligned} d\sigma &= E\varepsilon^E \\ d\varepsilon^P &= \Phi\, d\sigma + \Psi\, dt \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

iar în cazul ecuației constitutive (1.2.2), de-a lungul lui (1.2.9) este satisfăcută relația

$$d\sigma = \varphi\, d\varepsilon + \psi\, dt. \tag{1.2.13}$$

În (1.2.12) a fost utilizată notația

$$\varepsilon^P = \varepsilon^{IP} + \varepsilon^{VP}. \tag{1.2.14}$$

Din (1.2.8) rezultă că viteza variabilă de propagare $c(\sigma, \varepsilon)$ depinde atît de tensiune cît și de deformație. În particular dacă $\Phi = 0$ rezultă

$$c = c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \tag{1.2.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar c_0 este viteza undelor elastice longitudinale în bare. Dacă modelul este „plastic/rigid" (adică $E = \infty$) atunci

$$c = c_p = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \Phi}}. \tag{1.2.16}$$

Din restricțiile pentru Φ discutate mai sus rezultă că c_0 este valoarea cea mai mare pe care o poate lua c, deci este o viteză limită.

Găsirea pentru diverse materiale a restricțiilor la care trebuie să fie supuși cei doi coeficienți Φ și Ψ ce intervin în (1.2.1) (sau φ și ψ din (1.2.2)) și în final a formei lor explicite face de fapt obiectul prezentei lucrări. Vom cita în prezentul paragraf doar unele expresii care au fost deja utilizate în literatură pentru a da deocamdată cîteva exemple și pentru a da unele indicații asupra modului cum a fost dezvoltat modelul.

Primii autori care au considerat modelul (1.2.1) au presupus $\Phi = 0$, iar coeficientul $\Psi(\sigma, \varepsilon)$ a fost presupus a depinde în mod esențial de argumentul $\sigma - f(\varepsilon)$, care a fost numit „supratensiune". Astfel Sokolovski [1948 a, b] a utilizat expresia

$$\Psi(\sigma) = \frac{k}{E} F(|\sigma| - \sigma_Y) \tag{1.2.17}$$

cu

$$F(|\sigma| - \sigma_Y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}|\sigma| - \sigma_Y & \text{dacă} \quad |\sigma| > \sigma_Y \\ 0 & \text{dacă} \quad |\sigma| \leqslant \sigma_Y \end{cases}$$

iar σ_Y este limita (constantă) de plasticitate la întindere pură. k este de asemenea o constantă a materialului, iar E/k poate fi interpretat ca un coeficient de vîscozitate. Modelul lui Sokolovski descrie proprietatea de perfectă plasticitate, dar, evident, în alt sens decît în plasticitatea clásică.

Malvern [1951 a, b] a utilizat expresii mai generale pentru Ψ, pentru a descrie proprietăți de ecruisare, din nou în alt sens decît în plasticitatea clasică. Dintre expresiile utilizate vom cita

$$\Psi(\sigma, \varepsilon) = \frac{k}{E} (\sigma - f(\varepsilon)) \tag{1.2.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $f(\varepsilon)$ are semnificația din (1.2.4), sau

$$\Psi(\sigma, \varepsilon) = \frac{k}{E}\left[\exp\frac{\sigma - f(\varepsilon)}{a} - 1\right](\operatorname{sgn}\sigma) \qquad (1.2.19)$$

cu $a = \text{const.}$

O altă expresie în care intervine doar tensiunea a fost utilizată de Ting și Symonds [1964]

$$\Psi(\sigma) = \frac{D}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} - 1\right)^q, \quad \sigma \geqslant \sigma_Y > 0 \qquad (1.2.20)$$

cu D și q constante. Generalizări de tipul

$$\Psi(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{E}\sum_{\alpha=1}^{N} A_\alpha\left(\exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} - 1\right)^\alpha - 1\right), \qquad (1.2.21)$$

$$\sigma \geqslant \sigma_Y > 0$$

sau

$$\Psi(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{E}\sum_{\alpha=1}^{N} B_\alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} - 1\right)^\alpha, \quad \sigma \geqslant \sigma_Y > 0 \qquad (1.2.22)$$

au fost propuse de Perzyna [1963].

O funcție de forma

$$\Psi(\sigma, \varepsilon) = \frac{k}{E}(\sigma - f(\varepsilon))^m, \quad \sigma \geqslant f(\varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \varepsilon \geqslant 0 \qquad (1.2.23)$$

cu $m = 1$, 3, 5 și 1/2 a fost utilizată de Kukudjanov [1967] pentru unele calcule comparative.

Bazați pe considerații din teoria dislocațiilor, Johnston și Gilmann [1959] au propus o relație de forma

$$\Psi(\sigma) = \dot{\varepsilon}_e \exp\left(-\frac{A}{\sigma}\right). \qquad (1.2.24)$$

În cazul ecruisării liniare o variantă a acestei expresii a fost utilizată de Kuriyama și Kawata [1973]

$$\Psi(\sigma,\varepsilon) = \frac{4}{3} bv^*\left[N_0 + \frac{3}{4} M\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right)\right] \times$$

$$\exp\left(-\frac{2\left[D + \frac{3}{4} H\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right)\right]}{\sigma}\right) \qquad (1.2.25)$$

iar în cazul unei ecruisări parabolice

$$\Psi(\sigma, \varepsilon) = \frac{4}{3} bv^* \left[N_0 + \frac{3}{4} M \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right)\right] \times \tag{1.2.26}$$

$$\times \exp\left(-\frac{2D}{\sigma - 2H\left[\frac{3}{4}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right)\right]^n}\right)$$

cu b, v^*, N_0, M, D, H și n constante.

O expresie de forma

$$\Psi(\sigma, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{k(\varepsilon)}{E}[\sigma - f(\varepsilon)]^n & \text{dacă} \quad \sigma > f(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \varepsilon \geqslant \frac{\sigma}{E} \\ 0 & \text{dacă} \quad \sigma \leqslant f(\varepsilon) \end{cases} \tag{1.2.27}$$

cu $0 < n \leqslant 1$ a fost utilizată de Cristescu [1972b] pentru $\varepsilon \geqslant 0$ și $\sigma \geqslant 0$ și va fi considerată în exemplele de la Cap. III. În (1.2.27) $k(\varepsilon)$ este considerat variabil cu restricțiile

$$k(\varepsilon) \geqslant 0, \quad k'(\varepsilon) \geqslant 0, \quad k''(\varepsilon) \leqslant 0 \tag{1.2.28}$$

impuse de datele experimentale. Pentru $k(\varepsilon)$ au fost utilizate expresii de tipul

$$k(\varepsilon) = k_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\hat{\varepsilon}}\right)\right] \tag{1.2.29}$$

cu k_0 și $\hat{\varepsilon}$ constante sau

$$k(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \\ k_1 & \text{dacă} \quad \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1 \\ \frac{k_1 - k_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}(\varepsilon - \varepsilon_2) + k_2 & \text{dacă} \quad \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2 \\ k_2 & \text{dacă} \quad \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{1.2.30}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu k_1, k_2, ε_0, ε_1, ε_2 constante. În particular dacă $\varepsilon_0 > \varepsilon_Y$ și $k_1 > 0$ acest model poate descrie așa numitul efect de plasticitate întîrziată (delayield yield). Dacă $\varepsilon_0 = \varepsilon_Y$ sau $k_1 = 0$ un asemenea efect nu apare.

Ecuații constitutive de forma (1.2.1) cu $\Phi \neq 0$ au fost considerate în mai mică măsură datorită dificultăților în determinarea funcției Φ cît și a îngreuierii sensibile a calculelor. Anumite rezultate experimentale printre care citățm aici în special mărimea vitezelor de propagare ale undelor și legea de variație a tensiunii, au impus însă introducerea în ecuația constitutivă și a termenului conținînd pe $\Phi(\sigma, \varepsilon)$ (vezi Cap. III). Acest coeficient este și el supus anumitor condiții restrictive impuse de datele experimentale. Vom cita deocamdată două condiții restrictive ce vor fi utilizate în exemplele date la Cap. III.

Deoarece Φ guvernează panta curbei instantanee (1.2.5) s-a presupus (Cristescu [1972 b]) că această pantă este intermediară între panta elastică și cea a frontierei de relaxare ce corespunde aceleiași mărimi a deformației, deci

$$E \geqslant \frac{1}{\Phi(\sigma, \varepsilon) + \dfrac{1}{E}} > f'(\varepsilon). \tag{1.2.31}$$

O altă presupunere făcută referitor la Φ este că acest coeficient depinde de σ, ε și $\sigma_m(X)$ sub forma

$$\Phi = \chi(\sigma_m(X))\ \Omega(\sigma, \varepsilon) \tag{1.2.32}$$

unde $\sigma_m(X)$ are semnificația din (1.1.13) și

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad \sigma = \sigma_m(X) \\ 0 & \text{dacă} \quad \sigma \leqslant f(\varepsilon) + \sigma^* \quad \text{sau} \quad \sigma < \sigma_m(X) \end{cases} \tag{1.2.33}$$

iar σ^* este o constantă. Referitor la $\Omega(\sigma, \varepsilon)$ se va face presupunerea, care va fi explicată mai tîrziu, că el depinde în mod esențial de argumentul $\varepsilon - \sigma/E$, deși în general orice dependență de σ și ε poate fi presupusă inițial după care diversele condiții restrictive vor face precizări ale formei acestei funcții.

Scanned with OKEN Scanner

Dintre diversele expresii utilizate pentru Φ vom cita aici doar expresia

$$\Phi(\sigma,\ \varepsilon,\ \sigma_m(X)) = \chi(\sigma_m(X)) \left\{ \frac{3\left[\varepsilon - \frac{\sigma}{E} - \underset{\vee}{\varepsilon} + \left(\frac{a}{3E}\right)^{3/2}\right]^{2/3}}{a} - \frac{1}{E} \right\} \tag{1.2.34}$$

unde $\underset{\vee}{\varepsilon}$ este o constantă iar

$$a = m + n\sqrt{\varepsilon}$$

cu m și n de asemenea constante.

Vom mai menționa că unii experimentatori, deși nu au determinat explicit expresia lui Φ au recunoscut necesitatea introducerii ei pentru diverse materiale (Campbell [1973]).

O observație în legătură cu terminologia utilizată. Pe o curbă dinamică oarecare (vezi fig. 1.2.1) se pot pune în evidență mai multe porțiuni. Din definițiile pentru coeficienții Φ și Ψ date mai sus rezultă că de-a lungul lui AB

$$\Phi > 0, \quad \Psi > 0$$

și vom zice că are loc o *încărcare*. De-a lungul lui BD

$$\Phi = 0, \quad \Psi > 0$$

și zicem că are loc o *relaxare*, în sensul că deși deformația crește, tensiunea scade prin relaxare. Sub frontiera de relaxare unde

$$\Phi = \Psi = 0$$

zicem că stările sînt de *descărcare* sau pur elastice.

De remarcat că noțiunile de încărcare neutrală (care ar corespunde punctului B) sau de relaxare pură (în C) nu au pentru prezentul model (eventual generalizat pentru cazul tridimensional) semnificația pe care o au în cadrul modelelor clasice din plasticitate și respectiv vîscoelasticitate.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

Bazele experimentale utilizate pentru fundarea teoriei

§1. Experiențe statice

În vederea găsirii unui model mecanic care să descrie principalele proprietăți mecanice ale unui material, de obicei se efectuează un număr de încercări experimentale diagnostic pentru stabilirea acelor proprietăți mecanice care sînt în anumite condiții dominante.

Prima încercare diagnostic este de obicei experiența de întindere sau comprimare uniaxială a unei epruvete cilindrice. Pentru descrierea aspectului tehnic al acestor experiențe vom trimite cititorul la cărțile de specialitate (Buzdugan [1974], Ponomarev și alții [1960], Iliușin și Lenski [1959], etc.). Mai jos vom expune schematic cîteva experiențe diagnostic și vom discuta ce informații pot furniza asemenea experiențe din punctul de vedere al găsirii unui model mecanic simplu. Vom observa doar că există în principiu două tipuri de aparate de încercat. Cu unul dintre aceste aparate (îl vom numi de tip A) se poate comanda o variație a lungimii epruvetei iar răspunsul corespunzător al materialului este înregistrat prin înregistrarea forței necesare producerii acestei deformări. Într-un alt tip de aparat (îl vom numi de tip B) se poate însă comanda variația forței aplicate epruvetei (atîrnarea unei greutăți direct de epruvetă ca la unele aparate de studiat fluajul etc.) iar răspunsul materialului se înregistrează prin înregistrarea modului în care se deformează epruveta.

Scanned with OKEN Scanner

Ambele tipuri de experiențe furnizează niște diagrame tensiune-deformație de tipul celei din fig. 2.1.1 de exemplu. Este esențial, din punctul de vedere al tematicii acestei cărți, ca aceste experiențe să se efectueze într-un interval „obișnuit" de timp. Termenul „obișnuit" este greu de definit căci el depinde de natura materialului și de condițiile experienței (temperatură etc.). În general, pentru majoritatea metalelor de exemplu, la temperatura camerei, intervalul „obișnuit" ar fi de ordinul minutelor și uneori chiar al cîtorva zeci de minute. În general este vorba de timpul necesar efectuării unei experiențe cu un aparat „standard" de încercare. Prin urmare în diversele tipuri de experiențe diagnostic ce vor fi descrise mai jos, intervalul de timp de efectuare a experienței este o caracteristică esențială.

Prin efectuarea unei experiențe de tracțiune, de exemplu (sau de torsiune etc.) o diagramă tipică ce se obține este reprezentată în fig. 2.1.1. Pe ordonată se reprezintă tensiunea iar pe abscisă deformația (se utilizează una din definițiile uzuale pentru cele două concepte). Pentru deformații mici diagrama este liniară. Punctul Y marchează sfîrșitul acestei porțiuni. Pentru scopul urmărit aici se poate considera că „limita de proporționalitate", cea de „elasticitate" și cea

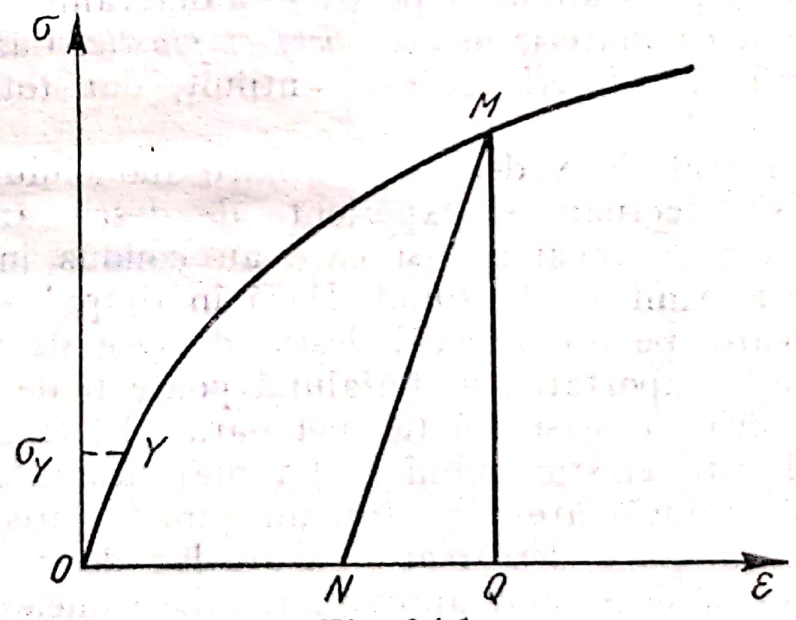


Fig. 2.1.1.

de „plasticitate" practic coincid. Vom sublinia că în literatură se utilizează în special două definiții pentru limita de plasticitate. Una asociază limita de plasticitate de mărimea părții

Scanned with OKEN Scanner

Ambele tipuri de experiențe furnizează niște diagrame tensiune-deformație de tipul celei din fig. 2.1.1 de exemplu. Este esențial, din punctul de vedere al tematicii acestei cărți, ca aceste experiențe să se efectueze într-un interval „obișnuit" de timp. Termenul „obișnuit" este greu de definit căci el depinde de natura materialului și de condițiile experienței (temperatură etc.). În general, pentru majoritatea metalelor de exemplu, la temperatura camerei, intervalul „obișnuit" ar fi de ordinul minutelor și uneori chiar al cîtorva zeci de minute. În general este vorba de timpul necesar efectuării unei experiențe cu un aparat „standard" de încercare. Prin urmare în diversele tipuri de experiențe diagnostic ce vor fi descrise mai jos, intervalul de timp de efectuare a experienței este o caracteristică esențială.

Prin efectuarea unei experiențe de tracțiune, de exemplu (sau de torsiune etc.) o diagramă tipică ce se obține este reprezentată în fig. 2.1.1. Pe ordonată se reprezintă tensiunea iar pe abscisă deformația (se utilizează una din definițiile uzuale pentru cele două concepte). Pentru deformații mici diagrama este liniară. Punctul Y marchează sfîrșitul acestei porțiuni. Pentru scopul urmărit aici se poate considera că „limita de proporționalitate", cea de „elasticitate" și cea

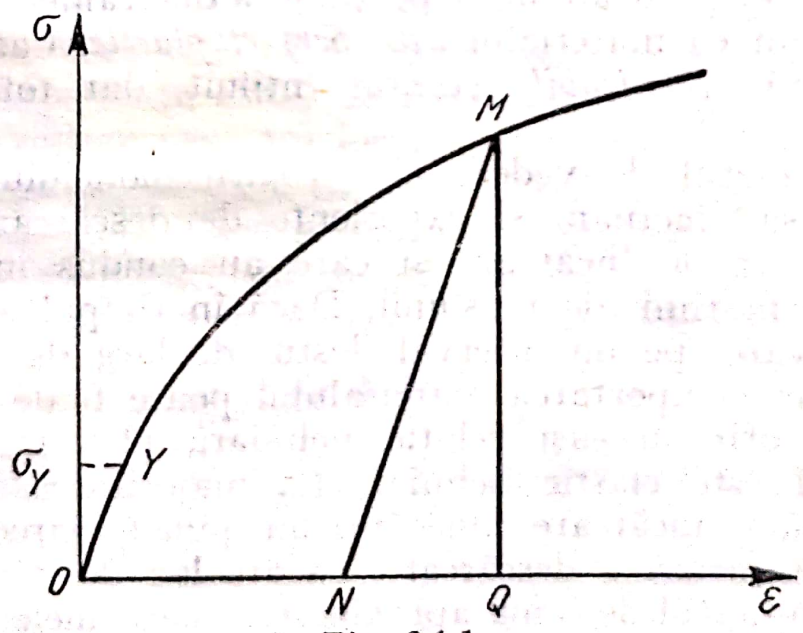


Fig. 2.1.1.

de „plasticitate" practic coincid. Vom sublinia că în literatură se utilizează în special două definiții pentru limita de plasticitate. Una asociază limita de plasticitate de mărimea părții

Scanned with OKEN Scanner

ireversibile a deformației raportată la deformația totală ce s-ar obține în cazul unei descărcări care ar urma imediat încărcării. Dacă această porțiune ireversibilă (numită plastică) a deformației atinge o anumită limită convențional definită, zicem că limita de plasticitate a fost atinsă. O altă definiție asociază limita de plasticitate cu schimbarea pantei tangentei la curba din fig. 2.1.1. Ținînd seama că pentru deformații mici curba este aproape liniară și aproximînd partea de deasupra lui σ_Y cu o linie dreaptă, σ_Y se obține ca ordonată a punctului de intersecție al celor două drepte. Cele două moduri de a defini limita de plasticitate nu sînt echivalente.

Dacă se continuă experiența și se face o încărcare continuă, se obține pentru $\sigma > \sigma_Y$ o diagramă care în general este neliniară. Această comportare a materialului pentru o încărcare continuă este modelată căutînd o expresie de forma

$$\sigma = f(\varepsilon) \tag{2.1.1}$$

a cărei reprezentare grafică să fie cît mai apropiată de curba găsită experimental. Dacă (2.1.1) este strict crescătoare zicem că materialul *este ecruisabil*. Dacă începînd de la $\sigma = \sigma_Y$ pe o anumită porțiune a diagramei, $\sigma = \sigma_Y =$ const. zicem că materialul este *perfect plastic*. Cazul $f' < 0$, adică cazul *decruisabil* este rar întîlnit, dar totuși posibil uneori.

Din punctul de vedere al stabilirii modelului mecanic este util să efectuăm și experiențe de descărcare care să urmeze celor de încărcare și care au condus în prealabil la diverse mărimi ale tensiunii. Dacă în timpul experienței de descărcare, pe un interval destul de larg de variație a deformației comportarea materialului poate fi de asemenea modelată prin aceeași relație neliniară (2.1.1), zicem că materialul este elastic neliniar. La majoritatea metalelor, dacă după o încărcare pînă într-un punct oarecare M cu $\sigma_M > \sigma_Y$ urmează o descărcare, ea are loc de obicei după MN. Cu o destul de bună aproximație, dacă unele fenomene secundare (histerezis) se pot neglija, atunci MN se poate aproxima cu o linie dreaptă

$$\sigma = \sigma_M + E(\varepsilon - \varepsilon_M) \tag{2.1.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde E este modulul lui Yong. Porțiunea ON a deformației este numită deformație plastică iar NQ este deformația elastică, reversibilă. Dreapta (2.1.2) este cu o bună aproximație paralelă cu dreapta lui Hooke

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.1.3}$$

care de obicei se utilizează pentru $-\varepsilon_Y \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_Y$.

Deoarece prin descărcare o parte a deformației este reversibilă, scriem

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_e \tag{2.1.4}$$

unde ε_p este partea plastică (ireversibilă) ON și ε_e partea elastică (reversibilă) NQ a deformației. Acele modele mecanice în care se pune în evidență o parte reversibilă a deformației pe lîngă cea ireversibilă sînt numite *elasto/plastice*. Dacă partea reversibilă a deformației se poate neglija în comparație cu cea ireversibilă, atunci modelul este numit *rigid/plastic*.

Să presupunem acum că experiența descrisă mai sus este întreruptă la o stare oarecare de tensiune și deformare (punctul M din fig. 2.1.2 a). Cu un aparat de tip A se poate ține în continuare constantă deformația ε_M și se poate măsura variația tensiunii cînd deformația este menținută constantă. Experiența arată că tensiunea descrește în timp. Această descreștere care are loc în intervalele de timp mai lungi decît cele ce intervin în experiențele descrise mai sus se numește *relaxare*. Dacă se consideră starea din M drept o stare inițială, atunci un model mecanic simplu care să descrie acest fenomen este așa numitul model Maxwell

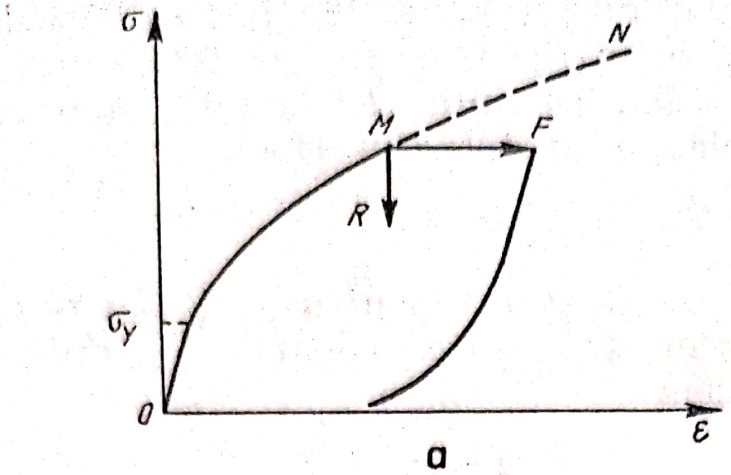
$$\dot{\varepsilon} = a\sigma + b\dot{\sigma} \tag{2.1.5}$$

unde a și b sînt constante. Dacă punem aici $\varepsilon = \varepsilon_M = \text{const.}$ tensiunea va varia conform relației

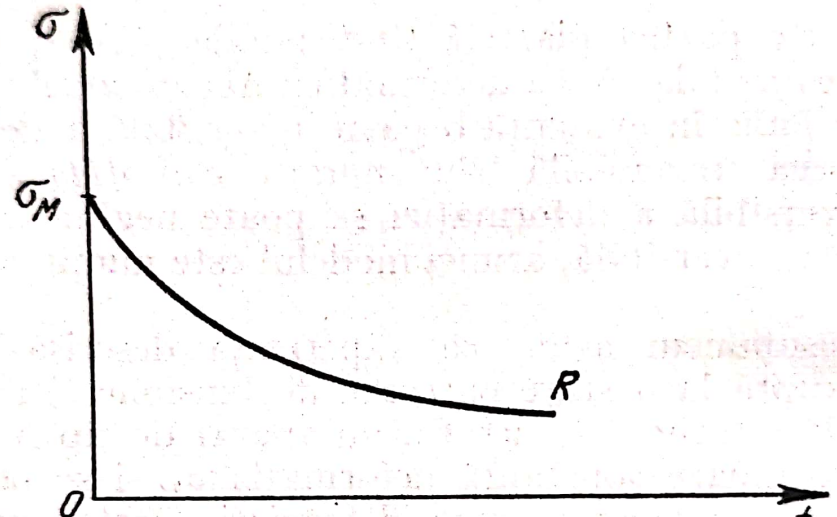
$$\sigma(t) = \sigma_M \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{2.1.6}$$

unde τ este o constantă a materialului. Această comportare este descrisă în fig. 2.1.2, b. În principiu sînt posibile două situații: tensiunea poate să scadă în intervalul (lung) care

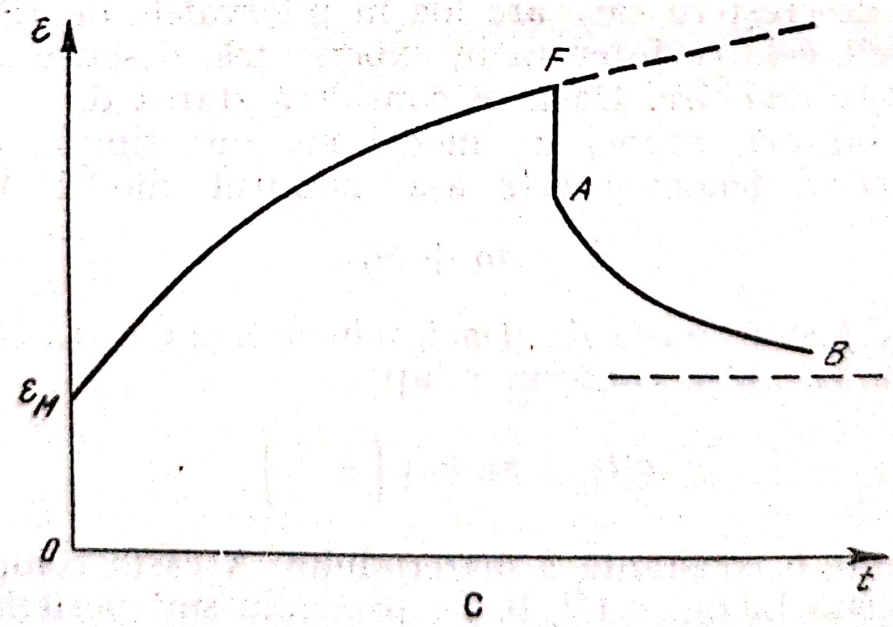
Scanned with OKEN Scanner



a



b



c

Fig. 2.1.2

Scanned with OKEN Scanner

ne interesează pînă aproape de zero sau curba din fig. 2.1.2, b are o asimptotă orizontală $\sigma = \sigma_R > 0$. În ultimul caz vom avea după un interval lung de timp, tensiuni remanente în epruvetă. Din punctul de vedere al găsirii unui model mecanic simplu pentru primul caz, cel mai simplu model mecanic care să descrie fenomenul este modelul Maxwell menționat. Pentru cel de al doilea caz cel mai simplu model care să descrie o asemenea relaxare este

$$\dot{\varepsilon} + a\varepsilon = b\dot{\sigma} + c\sigma \qquad (2.1.7)$$

numit uneori „corp liniar standard". Aici coeficienții a, b, c sînt constanți.

O altă experiență diagnostic se poate face cu ajutorul unui aparat de tip B, dacă după efectuarea unei încărcări obișnuite pînă în punctul M se continuă experiența păstrînd tensiunea (uneori forța) constantă. În acest caz se observă începînd din punctul M o creștere lentă în timp a deformației, deci în fig. 2.1.2, a diagrama continuă în direcția MF. Acesta este fenomenul *fluajului*. Prin urmare după scurgerea unui interval „lung" de timp (lung în sensul: deformarea de la M la F are loc într-un interval de timp de obicei cu cîteva ordine de mărime mai mare decît intervalul de timp scurs în timpul deformării de la O la M) deformația ireversibilă este uneori considerată a fi suma a două componente: cea obținută în timpul deformării de la O la M este numită „plastică" iar cea obținută de la M la F este numită „de fluaj". Deci în experiențe efectuate în intervale „obișnuite" de timp partea ultimă este de multe ori neglijabilă pe cînd în experiențe efectuate în intervale lungi de timp, prima parte devine la un moment dat neglijabilă în comparație cu a doua. Vom observa că în particular dacă $\sigma_M < \sigma_Y$, deformația „plastică" nu intervine, fiind prezentă după un interval lung de timp doar deformația de fluaj.

Din punctul de vedere al diagnosticării diverselor proprietăți fundamentale este uneori util nu numai să se studieze fenomenul de fluaj în timpul încărcării, dar și în timpul descărcării (al înlăturării tensiunii aplicate). Prin urmare dacă în punctul F (fig. 2.1.2, c) tensiunea σ_M este înlăturată brusc atunci deformația va scădea și ea. Dacă o anumită porțiune FA a deformației scade instantaneu, atunci modelul

Scanned with OKEN Scanner

trebuie să conțină și elementul elastic instantaneu, adică la cele două componente ale deformației ireversibile trebuie să se adauge și una elastică reversibilă. Uneori segmentul $FA = \varepsilon_Y$. Dincolo de punctul A deformația totdeauna continuă să scadă lent în timp urmînd curba AB. Zicem atunci că are loc un fluaj invers. De cele mai multe ori după scurgerea unui timp foarte lung deformația nu scade chiar la zero ci către o anumită limită obținută asimptotic. Uneori însă deformația scade chiar către zero și în acest caz materialul poate fi modelat cu un model „vîscoelastic" (modelul (2.1.7) de exemplu este unul din cele mai simple modele de acest tip, ce pot descrie relaxarea către o anumită limită).

Există multe materiale care nu se deformează (nu curg) decît dacă tensiunea depășește o anumită limită caracteristică materialului respectiv. Pentru asemenea materiale s-au utilizat așa numitele modele *vîsco-plastice* sau *fluide Bingham*. Dacă proprietățile elastice sînt neglijabile, cel mai simplu model de fluid Bingham poate fi scris sub forma

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{\sigma - \sigma_Y}{\eta} & \text{dacă} \quad \sigma \geqslant \sigma_Y \\ 0 & \text{dacă} \quad \sigma \leqslant \sigma_Y. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Aici σ_Y este tocmai tensiunea limită de care a fost vorba mai sus, și pentru ușurință o vom numi tot limită de plasticitate, iar η este așa numitul coeficient de vîscozitate. Desigur că σ_Y este o limită de plasticitate definită în alt sens decît cea discutată în legătură cu (2.1.1). Acest sens va fi precizat în capitolele care urmează. Vom observa aici doar că dacă pentru modelul „perfect plastic" în sens clasic tensiuni $\sigma > \sigma_Y$ nu sînt posibile pentru modelele vîscoplastice, stările plastice sînt definite tocmai prin inegalitatea de la $(2.1.8)_1$. Modelul (2.1.8) este un model *rigid/vîscoplastic* în sensul că modelul rămîne rigid dacă $\sigma \leqslant \sigma_Y$, dar se comportă vîscoplastic dacă $\sigma > \sigma_Y$. Modelul a fost utilizat nu numai pentru descrierea comportării unor corpuri fluide dar și a unor solide. Inițial modelul a fost utilizat pentru diverse paste, aluaturi, vaselină, noroi, vopsele etc. dar apoi și pentru metale. În acest ultim caz coeficientul η se poate pune în evidență experimental în felul următor. Să presupunem că

Scanned with OKEN Scanner

se efectuează două experiențe „standard" cu două viteze de deformare distincte $\dot{\varepsilon}_1$ și $\dot{\varepsilon}_2$ care să conducă la tensiunile σ_1 și respectiv σ_2. Presupunem că $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_Y$ și $\dot{\varepsilon}_2 > \dot{\varepsilon}_1$ (vezi fig. 2.1.3). Atunci din (2.1.8) se poate determina

$$\eta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1} \tag{2.1.9}$$

care prin urmare este aici o „măsură" a efectului vitezei de deformare asupra mărimii tensiunii. Pentru ușurință

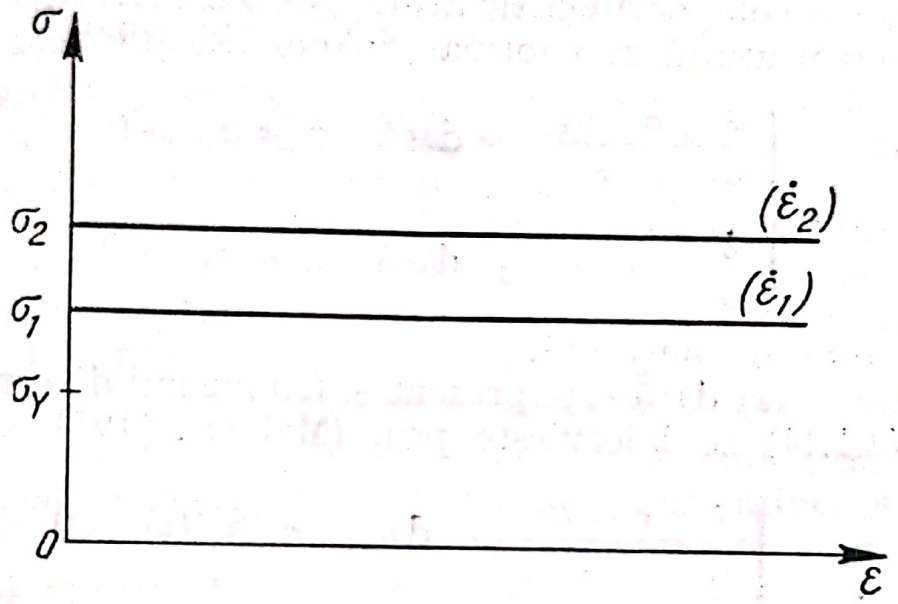


Fig. 2.1.3.

noi vom păstra pentru η terminologia de coeficient de vîscozitate. Acest coeficient joacă un rol important mai ales în cazul deformărilor rapide, dar nu numai în aceste cazuri, după cum se va arăta printr-un exemplu mai tîrziu. Vom mai observa că, pentru un același material, acest coeficient s-ar putea să nu fie unic definit; astfel dacă $\dot{\varepsilon}_4 > \dot{\varepsilon}_3$ sînt două viteze de deformare, cu mai multe ordine de mărime diferite de $\dot{\varepsilon}_2$ și $\dot{\varepsilon}_1$, atunci coeficientul η ce s-ar obține cu ajutorul unei formule de tipul (2.1.9) ar putea fi diferit de cel obținut pentru $\dot{\varepsilon}_2$ și $\dot{\varepsilon}_1$.

Dacă pentru un anumit tip de experiențe coeficientul de vîscozitate este unic determinat, atunci limita de plasticitate se poate determina din

$$\sigma_Y = \frac{\dot{\varepsilon}_2\sigma_1 - \dot{\varepsilon}_1\sigma_2}{\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1}. \tag{2.1.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notă importantă: dacă se efectuează mai multe experiențe în condiții identice dar în care viteza de încercare (sau viteza de deformare) este diferită la diverse experiențe și dacă în experiențele „mai rapide" se observă efectul de tipul reprezentat în fig. 2.1.3, adică dacă tensiunea crește odată cu viteza pentru o deformație dată, atunci modelul mecanic de încercat este de tip vîscoplastic.

Unele extinderi ale modelului (2.1.8) pot fi făcute cu ușurință. Dacă, de exemplu, pentru tensiuni $0 < \sigma < \sigma_Y$ corpul considerat se comportă elastic atunci modelul (2.1.8) se poate extinde cu ușurință sub forma (Sokolovski [1948 a, b])

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{\dot{\sigma}}{G} + \dfrac{\sigma - \sigma_Y}{\eta} & \text{dacă} \quad \sigma \geqslant \sigma_Y > 0 \\ \dfrac{\dot{\sigma}}{G} & \text{dacă} \quad \sigma \leqslant \sigma_Y > 0 \end{cases} \tag{2.1.11}$$

unde G este o constantă.

De asemenea dacă este prezent și fenomenul de ecruisare, atunci (2.1.11) se înlocuiește prin (Malvern [1951 a, b])

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{\dot{\sigma}}{G} + \dfrac{\sigma - f(\varepsilon)}{\eta} & \text{dacă} \quad \sigma \geqslant f(\varepsilon) > 0 \\ \dfrac{\dot{\sigma}}{G} & \text{dacă} \quad \sigma \leqslant f(\varepsilon) > 0. \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Acest concept de ecruisare este desigur diferit de cel definit de (2.1.1) și el va fi precizat ulterior. În (2.1.12) $\sigma = f(\varepsilon)$ este numită *frontieră de relaxare* (vezi Cap. I, §2).

§2. Experiențe dinamice cu bare lovite longitudinal

Experiențele cu bare lovite longitudinal sînt cele mai răspîndite experiențe de plasticitate dinamică. Dintre diversele experiențe ce au fost făcute, vom expune mai jos, pentru simplificare, numai acel tip de experiențe ale căror concluzii vor fi utilizate în Cap. III pentru determinarea unei ecuații constitutive. Este vorba de experiențe de lovire „simetrică". În aceste experiențe sînt lovite longitudinal

Scanned with OKEN Scanner

două bare identice. De obicei una este în repaus și alta este expediată dintr-un tun cu aer comprimat. Vom expune mai jos pe scurt ce se poate în principiu măsura și vom pune în evidență fenomene descoperite experimental care nu pot fi modelate cu ajutorul modelului expus în Cap. I, §1.

În primul rînd viteza barei proiectil și apoi intervalul de timp cît barele sînt în contact se poate măsura cu o metodă optică, cu destul de mare precizie. Timpul de contact este o mărime care dă unele informații globale asupra întregului proces de propagare a undelor elastice și plastice în barele lovite longitudinal. Un alt parametru care dă informații globale asupra întregului proces de încărcare și apoi descărcare dinamică este viteza finală a epruvetei, ce se poate obține de exemplu prin mijloace optice; epruveta inițial în repaus va fi pusă în mișcare datorită loviturii iar viteza ei se poate determina prin întreruperea succesivă a unor fante de lumină de către epruveta în mișcare. Atît timpul de contact cît și viteza finală dau informații „finale", la sfîrșitul întregului proces de deformare plastică.

O serie de alte măsurători furnizează date foarte importante pentru stabilirea unei ecuații constitutive. Astfel cu ajutorul unor rețele de difracție practicate pe suprafața laterală a epruvetei la diverse distanțe de capătul lovit (vezi Bell [1968]) se poate măsura variația în timp a deformației în timpul propagării undelor elastice și plastice prin secțiunea corespunzătoare a barei. Pentru exemplificare în fig. 2.2.1 este dată una din aceste curbe obținute pentru cupru, de J.F. Bell; epruveta este lovită cu viteza $V_0 = 1200$ cm/s iar măsurătoarea este făcută la 5,1 cm de capătul lovit. Se pot pune în evidență unele caracteristici remarcabile pe curba experimentală. Astfel prima creștere a deformației este produsă de sosirea în secțiunea respectivă a primei unde. Mărimea deformației pe prima undă ar trebui să fie conform teoriei de la Cap. I, §1 egală cu ε_Y. Experiențele arată că în apropiere de capătul lovit, deformația pe prima undă este însă mai mare decît ε_Y. În continuare deformația crește iar curba $\varepsilon - t$ își schimbă la un moment dat concavitatea. După atingerea maximului deformația rămîne pentru un timp relativ lung constantă; este așa numitul „platou" în timp al deformației la secțiunea considerată. Pentru a putea

Scanned with OKEN Scanner

face ușor o comparație prin linia plină s-a reprezentat o soluție obținută cu ajutorul unei teorii de tipul celor de la Cap. I, §1. De remarcat că nici schimbarea concavității curbei nu poate fi explicată cu ajutorul acestor teorii. Vom

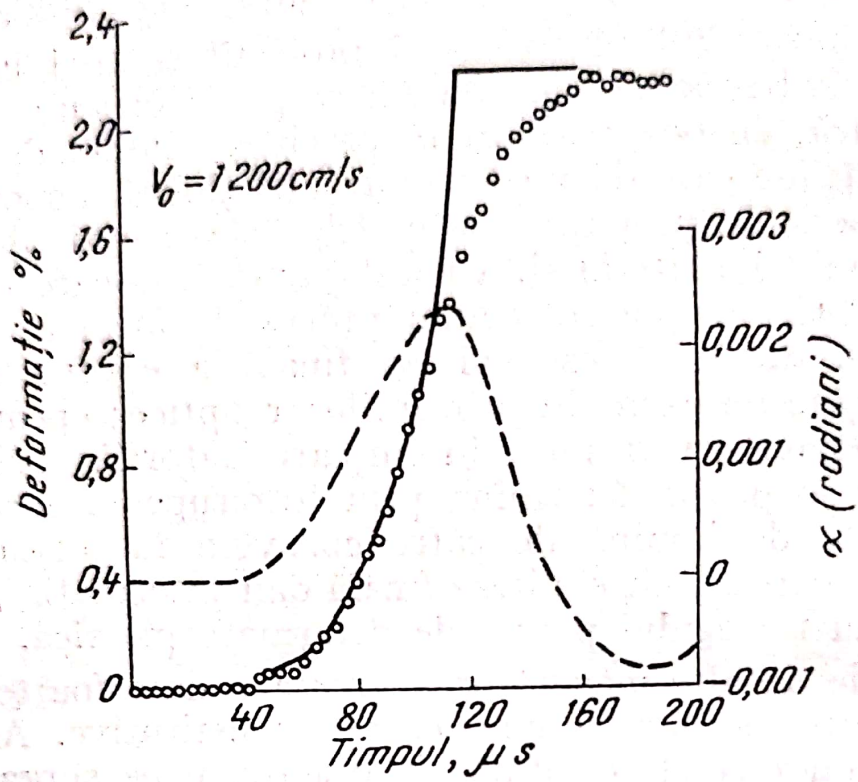


Fig. 2.2.1.

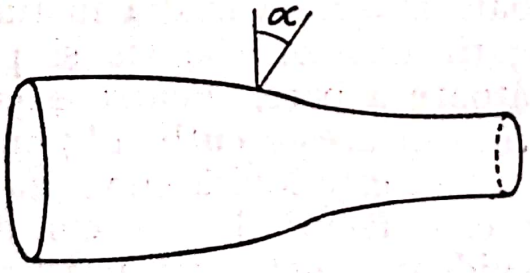


Fig. 2.2.2

mai observa că deformația la platou este în apropierea imediată a capătului lovit, mai mare decît la cîțiva centimetri de la capătul lovit. Și această concluzie experimentală nu este explicată cu ajutorul teoriilor de tipul celor de la Cap. I. §1.

În timpul deformării plastice, suprafața laterală a epruvetei se bombează. Dacă se notează cu α unghiul dintre poziția actuală a normalei la suprafața laterală și poziția ei inițială (fig. 2.2.2), se vede ușor că acest unghi care este inițial zero, crește și apoi scade în timpul propagării undelor

Scanned with OKEN Scanner

plastice, iar la sfîrșit este din nou zero. Și acest unghi poate fi măsurat experimental cu aceeași metodă optică. Un exemplu este dat pe fig. 2.2.1 prin linii punctate. Maximul lui α corespunde punctului de schimbare a concavității pe curba $\varepsilon - t$.

Curbe asemănătoare cu cele din fig. 2.2.1, pentru materiale nemagnetizabile, se pot obține cînd se măsoară prin inducție magnetică variația în timp a vitezei particulelor materiale într-o anumită secțiune a barei (vezi de exemplu Efron și Malvern [1969], Malvern [1965]). Aceasta se poate obține fie cu ajutorul unei bucle de sîrmă plasată pe suprafața laterală a epruvetei sau prin traversarea epruvetei de către o sîrmă, printr-un orificiu foarte mic. Pe o porțiune relativ lungă epruveta se plasează într-un cîmp magnetic uniform.

Măsurătorile obținute în acest fel, fie cu metoda optică fie cu cea a inducției magnetice, se consideră a fi foarte precise. În plus ele pot fi făcute de-a lungul barei la diverse distanțe de la capătul lovit, furnizînd astfel tot tabloul variației deformației (în cazul metodei optice), sau a vitezei (în cazul metodei inducției magnetice) în lungul întregii bare de la momentul lovirii pînă la momentul începerii descărcării, și uneori chiar și în timpul descărcării.

O altă variabilă care poate fi măsurată la capătul lovit este tensiunea. În general tensiunea poate fi măsurată prin plasarea unei foițe de piezocristal (grosime 0,127 mm) între cele două bare care se lovesc. Un rezultat tipic pentru două experiențe de lovire simetrică, este dat în fig. 2.2.3 după Filbey [1961] pentru viteze de lovire $V_0 = 7100$ cm/s. După cum se poate vedea din figură tensiunea crește foarte repede la capătul lovit către un „vîrf" și apoi scade în cîteva microsecunde pentru a rămîne aproape constantă un timp relativ lung. Se pune astfel în evidență un „platou" în timp al tensiunii la capătul lovit. Scăderea tensiunii care urmează este datorită descărcării. Mărimea vîrfului tensiunii este foarte mare, mult mai mare decît ar rezulta dintr-un calcul care ar utiliza o teorie clasică de plasticitate sau chiar un model linear elastic. Deci prezența acestui „vîrf" pune în evidență un alt aspect ce nu poate fi descris cu o teorie de tipul celor de la Cap. I, §1, după cum nu poate fi explicată nici scăderea

Scanned with OKEN Scanner

tensiunii de la valoarea din „vîrf" pînă la valoarea corespunzătoare platoului. Teoriile clasice pun în evidență doar platoul, apariția tensiunilor mai mari la capătul lovit ne putînd fi explicate de aceste teorii.

Tensiunea dezvoltată în timpul lovirii longitudinale a epruvetei a mai fost măsurată și cu ajutorul unei „bare de încăr-

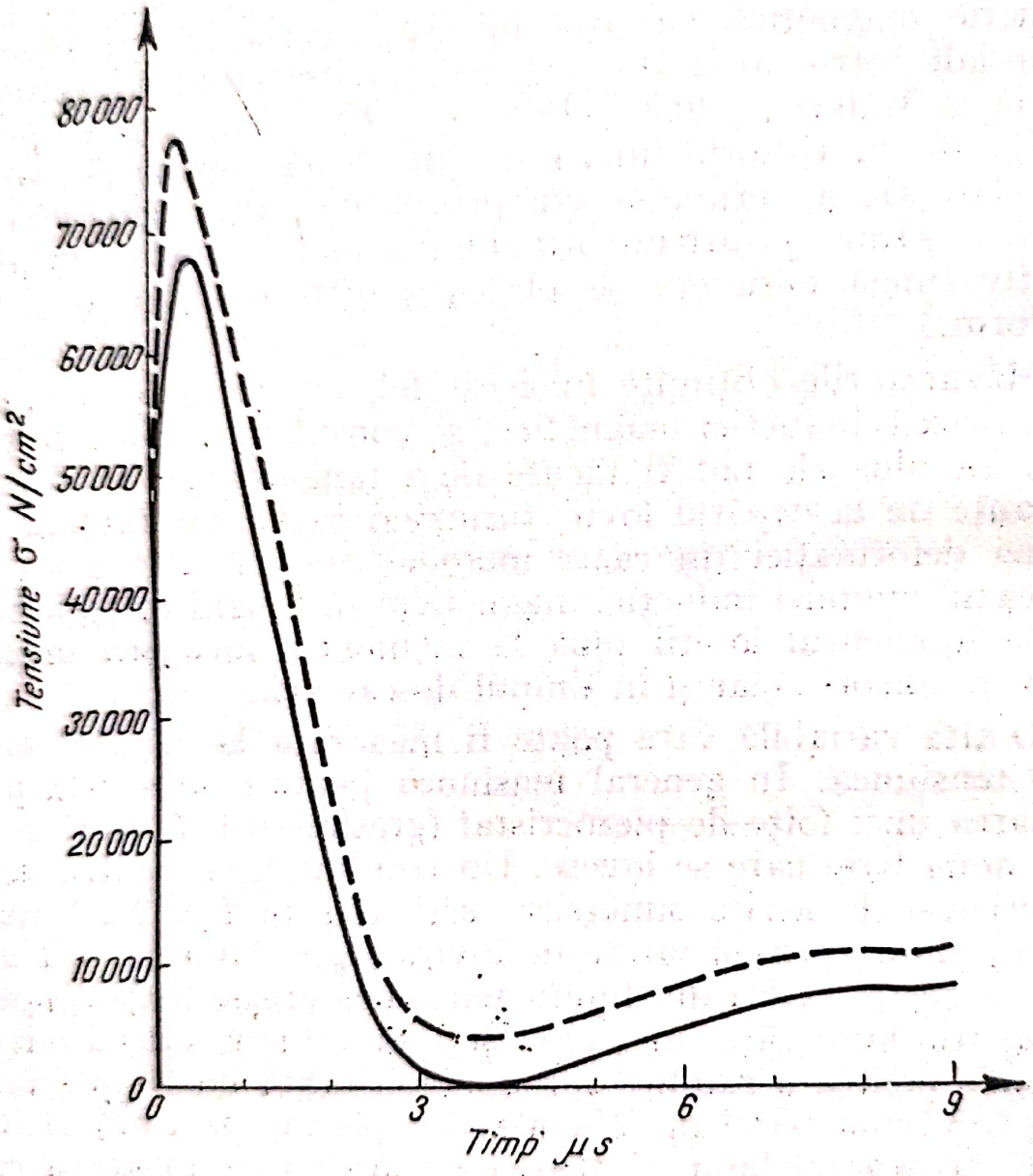


Fig. 2.2.3.

care", adică o bară elastică tare prin care se transmite șocul epruvetei. Epruveta este confecționată în acest caz dintr-un material mult mai moale. Măsurînd deformația barei de încărcare (de obicei destul de aproape de capătul în contact

Scanned with OKEN Scanner

cu epruveta) cu metode tensometrice rezistive, se poate obține variația tensiunii la capătul lovit al epruvetei. Concluziile obținute cu această ultimă metodă sînt în concordanță cu cele deja menționate anterior.

§3. Experiențe de reîncărcare

a) **Încărcare statică urmată de o încărcare dinamică.** O experiență care a jucat un rol foarte important în dezvoltarea teoriei a fost efectuată de J. F. Bell [1951] în 1951. O bară lungă de oțel moale, de cca. 183 cm, a fost supusă unei încercări statice obișnuite de întindere. Schema experienței este dată în fig. 2.3.1. Epruveta AB este fixată în A și este supusă unei întinderi cu viteza uniformă în B. BC este o bară mult mai dură, prin care se transmite încărcarea statică și prin care se măsoară forța aplicată. În timpul încărcării statice în domeniul plastic, se aplică unele mici reîncărcări dinamice obținute prin căderea unui inel D. Deci reîncărcarea, tot de întindere, este aplicată la capătul B al barei. În punctul E cu ajutorul unor captori rezistivi se poate măsura timpul scurs de la momentul reîncărcării pînă la momentul cînd primele unde produse de lovitură ajung din B în secțiunea E a barei. Dacă curba caracteristică pentru materialul barei este cunoscută, teoria expusă la Cap. I, §1 arată că undele ce se propagă în bare aflate deja în stadiu plastic se vor propaga cu viteza (1.1.6) determinată de panta curbei caracteristice calculată pentru mărimea deformației obținută în încărcarea statică precedentă. Totuși rezultatele experimentale ale lui Bell au arătat că primele unde ce sosesc în E se propagă mult mai repede și anume cu viteza c_0 a undelor elastice (vezi (1.1.12)). Acest rezultat nu poate fi explicat cu ajutorul teoriei expusă în Cap. I, §1. Bell a mai efectuat și unele experiențe de descărcare dinamică, adică în timpul încercării statice descrisă mai sus lasă să cadă o bilă de oțel care

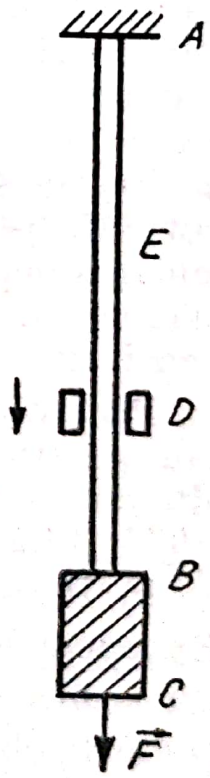


Fig. 2.3.1.

Scanned with OKEN Scanner

lovește capătul A al barei producînd unele unde de comprimare, deci de descărcare. În acest caz s-au obținut viteze de propagare pentru undele de descărcare care erau tot cele elastice c_0. Acest ultim rezultat era în concordanță cu teoria, dar primul a pus serioase probleme teoriei.

Experiențe de același tip au fost apoi repetate de mai mulți cercetători. Instalațiile experimentale difereau mai mult sau mai puțin, dar ideia era mereu aceeași. Astfel Sternglass și Stuart [1953] au utilizat o mașină standard de încercat iar epruveta era o bandă de cupru lungă de 302 cm. Aproximativ la mijlocul epruvetei era montată o mică platformă care era lovită longitudinal cu un ciocan. Lovitura producea unde de reîncărcare de întindere într-o parte a epruvetei și unde de descărcare în cealaltă parte. Din nou viteza de propagare a primului front era înregistrată cu ajutorul unor captori electrici rezistivi. Concluziile obținute au fost similare cu cele descrise mai sus.

G. Bianchi [1964] a făcut și el experiențe cu benzi foarte lungi (8 m) de cupru, întinse la un capăt cu ajutorul unei greutăți. Încărcarea dinamică era din nou produsă la mijlocul epruvetei astfel încît în aceeași experiență să se poată observa atît unde de încărcare cît și cele de descărcare. Tot epruvete foarte lungi (sîrme de cupru și aliaje de aluminiu) au fost utilizate și de Malîșev [1960] [1961]. El a utilizat însă o altă metodă pentru măsurarea timpului sosirii primei unde la diverse secțiuni ale barei, metodă considerată mult mai potrivită pentru experiențe de plasticitate dinamică: determinarea deplasării diverselor secțiuni ale sîrmei prin inducție magnetică. Și acești doi ultimi autori ajung la aceleași concluzii, ca cele deja menționate.

Pentru alte detalii privind experiențele descrise mai sus, sau pentru discutarea altor experiențe similare făcute de alți autori a se vedea Cristescu [1967] Cap. III, §9 și Bell [1973] §4.27.

b) **Încărcare dinamică urmată de altă încărcare dinamică.** Experiențele descrise mai sus au pus problema dacă efectul propagării undelor de reîncărcare cu o viteză elastică mai poate fi observat și în cazul cînd prima încărcare este tot o încărcare dinamică. Primele experiențe de acest tip au

Scanned with OKEN Scanner

fost făcute de Alter și Curtis [1956] pe epruvete de plumb. Ideia experienței, reluată apoi și de alți autori, este următoarea (fig. 2.3.2). Bara de plumb AB este lovită longitudinal cu o altă bară BCD ce are o limită de plasticitate mult mai mare și deci rămîne elastică în timpul experienței. În C bara prioectil are o creștere bruscă a diametrului. Epruveta AB este eventual continuată cu o a treia bară AE ce de asemenea rămîne elastică în timpul experienței. Datorită lovirii epruveta AB este deformată plastic dinamic iar deformația se măsoară la diverse puncte M_1, M_2, ... cu ajutorul unor captori rezistivi. Lovitura va provoca și propagarea unor unde elastice în bara proiectil. Aceste unde se reflectă de secțiunea C și se reîntorc către secțiuea B constituind o a doua încărcare dinamică pentru epruveta AB, suprapusă peste prima. Prin varierea lungimii BC se poate realiza reîncărcarea la orice moment dorit după prima încărcare. Viteza de propagare a undelor de reîncărcare se înregistrează apoi în secțiunile M_1, M_2, ... Epruveta cît și bara proiectil trebuie să fie destul de lungi pentru ca reflectarea undelor de la capetele A și respectiv D să nu perturbe fenomenul de reîncărcare studiat.

Experiențe similare au fost făcute de Bell și Stein [1962]. Epruvetele erau tuburi subțiri de aluminiu moale AB (fig. 2.3.3). Ele erau lovite longitudinal cu un proiectil de asemenea tubular, care însă pe ultima porțiune DE era plin. Pro-

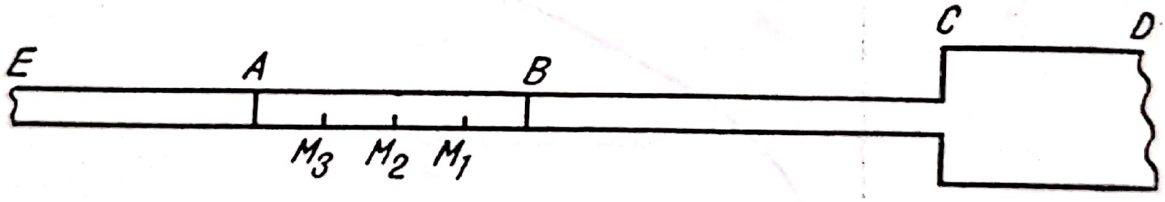


Fig. 2.3.2

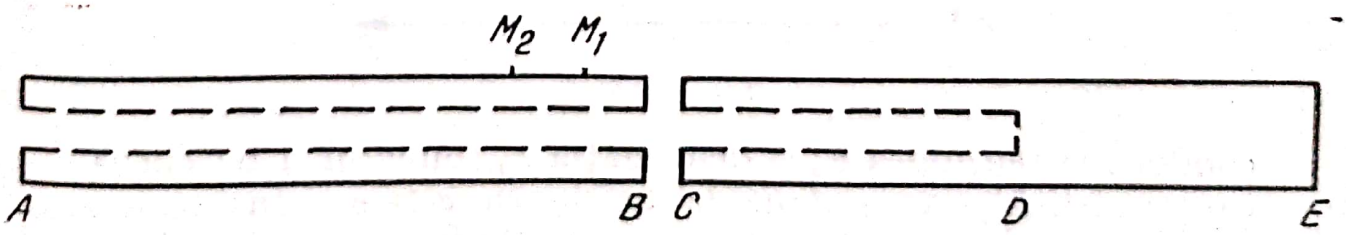


Fig. 2.3.3

Scanned with OKEN Scanner

iectilul era confecționat din aluminiu foarte dur. Prin urmare a doua încărcare dinamică era produsă de reflectarea la secțiunea D a proiectilului, a undelor elastice produse de ciocnire și de propagarea lor înapoi în secțiunea C. Controlul intervalului de timp cînd se produce reîncărcarea se face variind lungimea BC a porțiunii de proiectil. La diverse secțiuni M_1, M_2, ... de-a lungul epruvetei deformația a fost măsurată cu ajutorul metodei optice a rețelelor de difracție, metodă mult mai precisă de măsurare a deformațiilor în domeniul plastic, mai ales în probleme dinamice.

Au mai fost utilizate și alte instalații experimentale în care epruvete în formă de bară au fost lovite longitudinal cu proiectile confecționate din două bare din materiale de densități diferite. În afară de deformația măsurată la diverse secțiuni ale epruvetei se mai poate măsura și tensiunea la capătul lovit, utilizînd o a treia bară elastică de transmitere a șocului.

Diversele experiențe de tipul celor descrise mai sus conduc la unele concluzii ce ar putea fi explicate mai bine în planul caracteristic și utilizîndu-se teoria descrisă la Cap. I, §1. Prin urmare să presupunem că utilizăm o curbă caracteristică (fig. 2.3.4) obținută prin metode standard pentru a descrie proprietățile mecanice ale materialului în timpul experienței. Să presupunem că prima încărcare dinamică

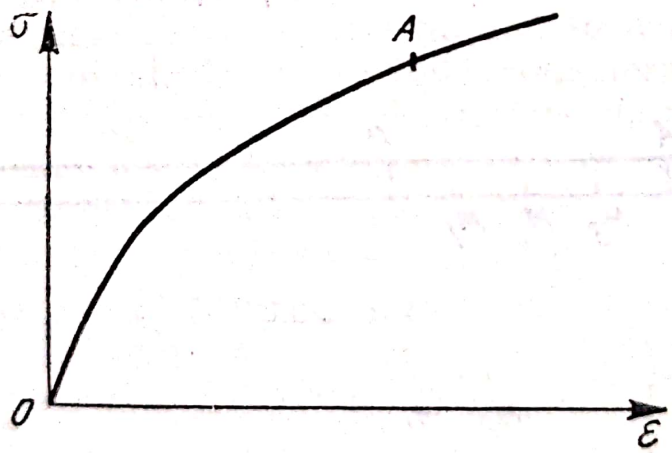


Fig. 2.3.4.

conduce la tensiunea σ_A și deformația ε_A (punctul A pe curba caracteristică), iar a doua la tensiunea $\sigma > \sigma_A$. Încărcarea dinamică în două trepte este reprezentată în partea din stînga a fig. 2.3.5. Dacă $\sigma_A > \sigma_Y$ atunci prima lovitură va produce

Scanned with OKEN Scanner

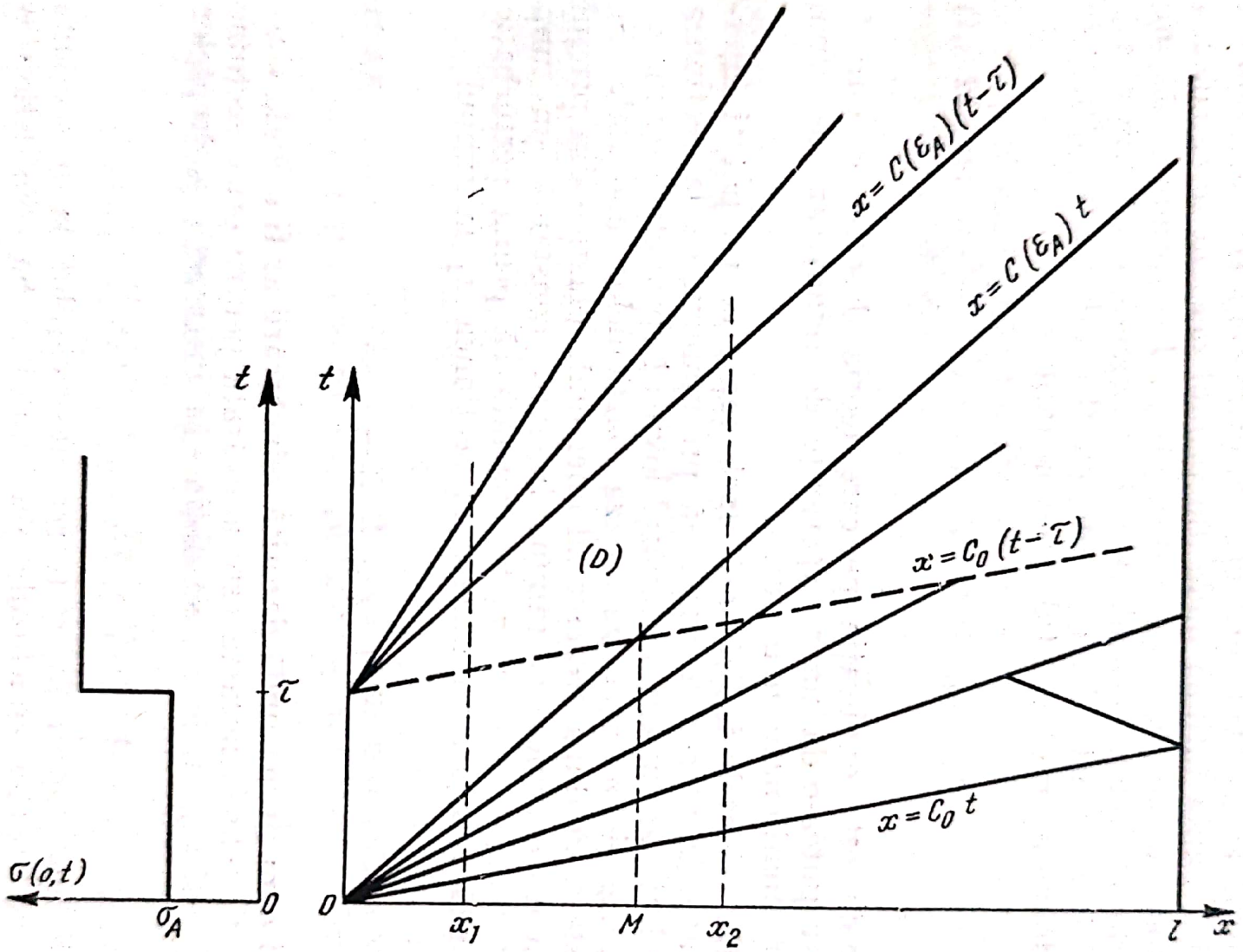


Fig. 2.3.5

propagarea în bară a unui fascicul de unde plastice (fascicul centrat în O) conform teoriei din Cap. I, §1. În intervalul de timp $0 < t < \tau$ de la capătul lovit nu mai pornește nici o undă. La momentul $t = \tau$ prima undă de reîncărcare pornește de la capătul epruvetei datorită reîncărcării. Conform teoriei, panta ultimei unde din primul fascicul se calculează cu formula (1.1.6) și este deci $c^2(\varepsilon_A)$. Dar prima undă din cel de al doilea fascicul este de asemenea de pantă $c^2(\varepsilon_A)$. Deci între aceste două drepte paralele, domeniul (D), este un domeniu în care totul este constant

$$\sigma = \sigma_A, \quad \varepsilon = \varepsilon_A, \quad v_A = \int_0^{\sigma_A} \frac{d\sigma}{\rho_0 c(\sigma)}. \tag{2.3.1}$$

Aceasta este explicația pe care teoria descrisă la Cap. I, §1 ar putea-o da unor experiențe de reîncărcare de tipul celor menționate mai sus.

Experiențele indică însă unele fapte ce nu pot fi interpretate de teoria descrisă. Să presupunem că la secțiunea x_1 relativ apropiată de capătul lovit al epruvetei este măsurată fie deformația fie viteza particulelor materiale. Se constată că după trecerea ultimei unde plastice din primul fascicul secțiunea x_1 rămîne în stare constantă un timp mult mai scurt decît τ. Se constată că prima perturbație datorită reîncărcării sosește în secțiunea x_1 la timpul

$$t = \frac{x_1}{c_0} + \tau \tag{2.3.2}$$

ca și cum prima undă datorită reîncărcării ar fi o undă elastică. Concluzia aceasta este adevărată pentru orice secțiune $0 \leqslant x \leqslant x_M$, unde x_M se obține ca intersecție a dreptelor

$$x = c_0(t - \tau), \qquad x = c(\varepsilon_A)t.$$

Dacă însă facem înregistrarea observațiilor la o secțiune $x > x_M$ atunci concluziile sînt diferite. Să considerăm o secțiune $x_2 > x_M$. La timpul

$$t = \frac{x_2}{c_0} + \tau \tag{2.3.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

undele plastice din primul fascicul continuă însă să se propage în secțiunea considerată și nu se observă în nici un fel influența reîncărcării. Totuși pentru

$$\frac{x_2}{c(\varepsilon_A)} + \tau > t > \frac{x_2}{c_0} + \tau \tag{2.3.4}$$

aspectul propagării undelor plastice este întrucîtva distorsionat. Deci prima undă de reîncărcare se propagă cu viteza c_0 doar pînă ce ajunge din urmă ultima undă plastică din primul fascicul. Pe de altă parte în secțiunea x_2 un interval de timp în care toate variabilele să fie constante (domeniul (D)) nu mai există, adică reîncărcarea se face simțită cu mult înainte de timpul

$$t = \frac{x_2}{c(\varepsilon_A)} + \tau \tag{2.3.5}$$

prezis de teorie.

Prin urmare, în cazul unei experiențe de reîncărcare dinamică ce urmează o altă primă încărcare de asemenea dinamică se pun în evidență concluzii experimentale ce nu pot fi explicate cu teoria expusă la Cap. I, § 1. Aceasta se referă atît la vitezele cu care se propagă undele de reîncărcare cît și la interacțiunea lor cu undele plastice ce continuă să se propage datorită primei încărcări. Prin urmare, deși unele aspecte ale propagării undelor plastice pot fi descrise și cu o teorie de tipul celei din Cap. I, § 1, faptul că natura undelor plastice nu este exact descrisă pune problema corectitudinii ecuației constitutive utilizate și necesitatea îmbunătățirii ei.

§4. Efectul Portvin — Le Chatelier

Acest efect, se pare descoperit încă de A. P. Masson [1841] și F. Savart [1837], a dat naștere la multe dispute contradictorii. Efectul a fost descoperit cu ajutorul unor aparate de tip B. Să presupunem că o epruvetă este încărcată continuu în întindere sau comprimare, viteza de încărcare fiind constantă. La experiențe de întindere, de exemplu, se poate încărca prin agățarea de epruvetă a unui recipient

Scanned with OKEN Scanner

în care curge apa în mod continuu. Desigur aceste experiențe sînt foarte lente și durează de la cîteva ore la cîțiva ani. Ce s-a observat?

Pe măsură ce forța crește materialul se deformează la început liniar elastic. Acest proces de deformare este continuu, în sensul că la o viteză de încărcare constantă răspunsul materialului este o deformare cu o viteză de deformare

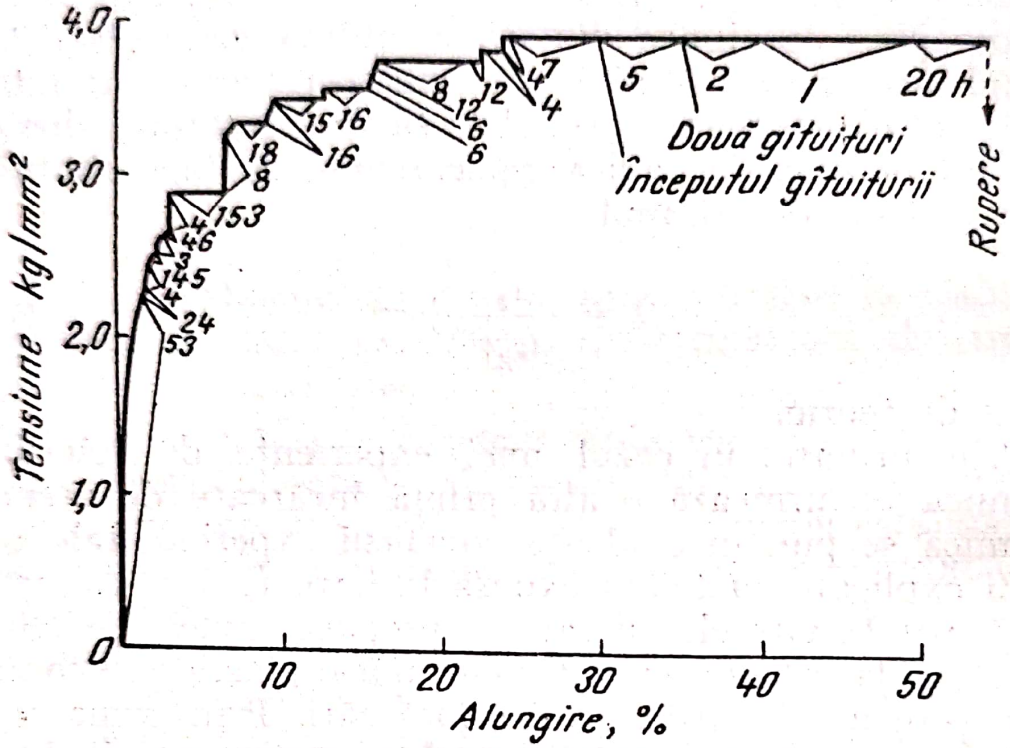


Fig. 2.4.1

constantă. Odată intrat în domeniul plastic, deformarea nu mai are acest aspect continuu ci „în trepte" (vezi fig. 2.4.1). Deci deformația crește foarte încet în timpul creșterii tensiunii ca apoi, la un moment dat deformația crește mult mai repede, astfel încît curba caracteristică ce se obține are aspectul unor „trepte". În timpul creșterii „lente" a deformației panta locală a curbei caracteristice este în general apropiată (ceva mai mică uneori) de panta legii lui Hooke. Pe porțiunile unde deformația crește repede, panta locală a curbei caracteristice este aproape orizontală. În fig. 2.4.1 este dată o asemenea curbă caracteristică obținută de Hanson și Wheeler [1931] pentru aluminiu în decurs de 573 zile. Cifrele de pe figură marchează numărul de zile scurse pentru a parcurge segmentul respectiv al curbei.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, fenomenul descris aici indică un răspuns în trepte al deformației la o creștere a tensiunii cu viteză constantă. Fenomenul a fost pus în evidență de foarte mulți experimentatori în ultimul deceniu, toți utilizînd însă mașini de încercat de tip B. Portvin și Le Chatelier [1923] au făcut un studiu sistematic al fenomenului, observînd că la fiecare punct de discontinuitate epruveta produce un „zgomot" (studiul deformării plastice a unor structuri metalice prin înregistrarea emiterii de „sunete" produse local în momentul deformării plastice este astăzi o metodă foarte eficientă de studiu al deformării plastice a unor structuri metalice complexe, acolo unde teoria este dificil de aplicat). Unii autori au pus în evidență fenomenul și cu ajutorul unor aparate de încercat de tip A, în care caz se pun în evidență mici oscilații ale tensiunii, deformația făcîndu-se cu viteză constantă.

Fenomenul a fost atribuit diverselor cauze și a primit diverse explicații. Unii l-au considerat un fenomen de instabilitate a materialului, alții l-au considerat produs de propagarea unor „unde lente" (viteză de propagare de cca. 0,5 cm/s —800 m/s) etc. S-a pus și problema dacă prezența unui asemenea fenomen nu indică necesitatea găsirii unor ecuații constitutive mai exacte decît (2.1.1), în care atît răspunsul „lent" cît și cel mai „rapid" descris mai sus să fie ambele înglobate într-o singură ecuație constitutivă. Temperatura, structura cristalografică, impuritățile etc., desigur că influențează fenomenul. El a fost observat pe monocristale și pe policristale. Pentru o istorie a experiențelor făcute pentru detectarea acestui fenomen trimitem cititorul la Bell [1973].

§5. Experiențe dinamice cu plăci

Experiențele dinamice cu bare, menționate mai sus, au fost cele mai răspîndite experiențe efectuate și în același timp și cele mai ușor de executat. Au fost făcute și unele reproșuri privitor la rezultatele obținute, mai ales datorită presupunerii făcută în teoria asociată acestor experiențe, că inerția transversală poate fi neglijată. Cu alte cuvinte particulele materiale ale barei lovite se pot mișca atît în

Scanned with OKEN Scanner

direcție longitudinală cît și în cea transversală, ambele mișcări fiind înglobate în teoria de la Cap. I, § 1. În scrierea ecuației de mișcare (1.1.1) însă componenta radială a accelerației este neglijată în raport cu cea longitudinală. Aceasta a dat naștere la multe discuții și la dorința de a organiza alte tipuri de experiențe în care reproșul de mai sus să nu mai poată fi făcut. Două tipuri de experiențe au fost efectuate în acest scop. Au fost făcute experiențe dinamice de torsiune a unor tuburi subțiri, și deci s-a studiat propagarea undelor plastice de torsiune, precum și experiențe dinamice de lovire a două plăci. Mai jos vom prezenta schematic ultimul tip de experiențe.

În experiențele cu plăci, una din plăci — epruveta — este în repaus iar a doua placă — proiectilul — o lovește

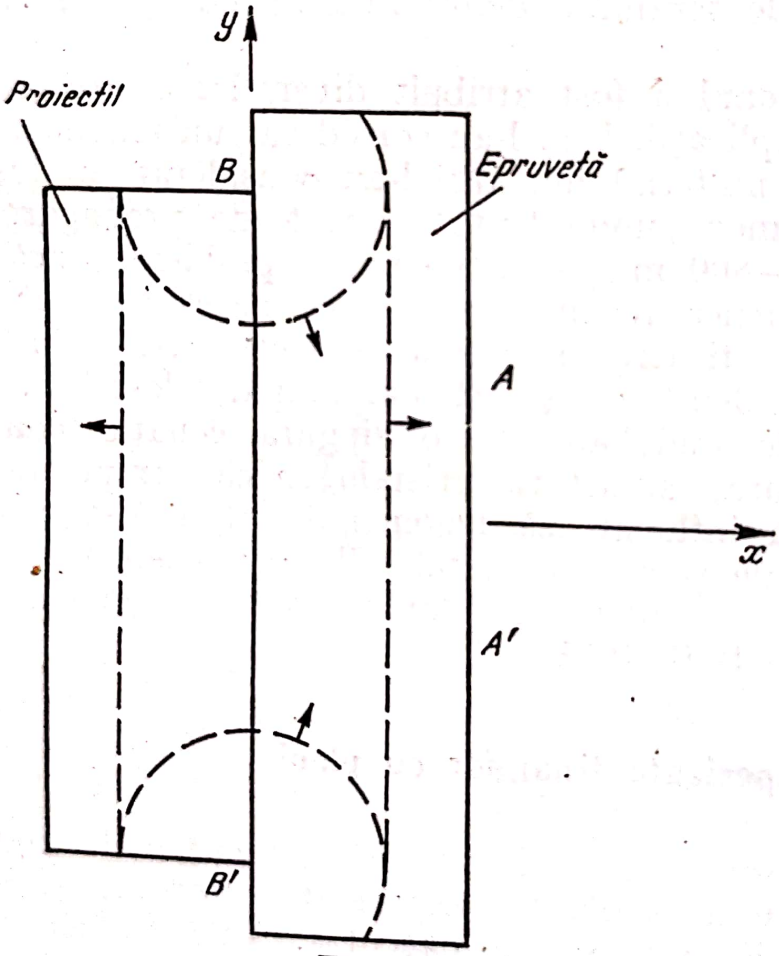


Fig. 2.5.1

cu o anumită viteză dorită (vezi fig. 2.5.1). Materialul din care sînt confecționate cele două plăci poate fi același sau nu. Lovirea este efectuată pe suprafața laterală a plăcii

astfel încît undele de compresiune generate de lovitură se propagă în direcția grosimii plăcii și sînt unde plane. Proiectilul este de obicei montat pe un piston (din material plastic sau din alt material) și este accelerat într-un tun cu gaz comprimat. Să presupunem că proiectilul se deplasează de la stînga către dreapta (vezi fig. 2.5.1) și lovește epruveta de-a lungul suprafeței laterale $X = 0$. Datorită loviturii, unde plane se vor propaga atît în epruvetă cît și în proiectil. Dacă dimensiunile laterale ale plăcii sînt relativ mari în comparație cu grosimea ei, atunci undele plane vor ajunge la suprafața liberă tot ca unde plane fără să fie influențate de undele de descărcare inițiate din colțurile B și B'. De fapt doar o anumită porțiune AA' din centrul suprafeței libere nu va fi perturbată de undele de descărcare, decît după reflectarea undelor plane de încărcare de la această suprafață liberă. Evoluția undelor de încărcare în timpul propagării se studiază prin experiențe repetate în aceleași condiții, dar în care grosimea epruvetei este variată.

În timpul experienței pot fi măsurate mai multe cantități (pentru detalii privind aspectele tehnice ale experienței a se vedea Fowles [1973], Karnes [1968]). În general se poate măsura, în aceeași experiență, sau în experiențe distincte, viteza proiectilului, tensiunea la suprafața de impact între cele două plăci, viteza suprafeței libere AA', deplasarea acestei suprafețe, tensiunea pe această suprafață (dacă pe ea se montează un cristal de cuarț) etc.

Nici teoria acestor experiențe nu va fi prezentată aici. Vom trimite cititorul interesat la alte lucrări (Duvall [1961], Kolsky și Prager [1964], Cristescu [1967] Cap. VIII, Lindholm [1968]), și la bibliografia indicată în aceste lucrări.

Dintre rezultatele experimentale ce se pot obține vom cita în primul rînd curba de variație în timp a vitezei la suprafața liberă. În fig. 2.5.2 este dată o asemenea curbă tipică. Această curbă are, în general, toate caracteristicile deja discutate în legătură cu lovirea longitudinală a barelor: există un prim front „elastic", amplitudinea pe acest prim front depășește amplitudinea ce ar rezulta dintr-o ecuație constitutivă elastică, apoi avem o schimbare a curburii (din nou ea nu poate fi explicată cu ecuații constitutive de tip clasic), există un platou etc. Mai mulți experimenta-

Scanned with OKEN Scanner

tori au arătat că amplitudinea pe primul front („precursorul") descrește cu distanța (acest lucru se poate studia prin creșterea grosimii epruvetei) (vezi Taylor și Rice [1963],

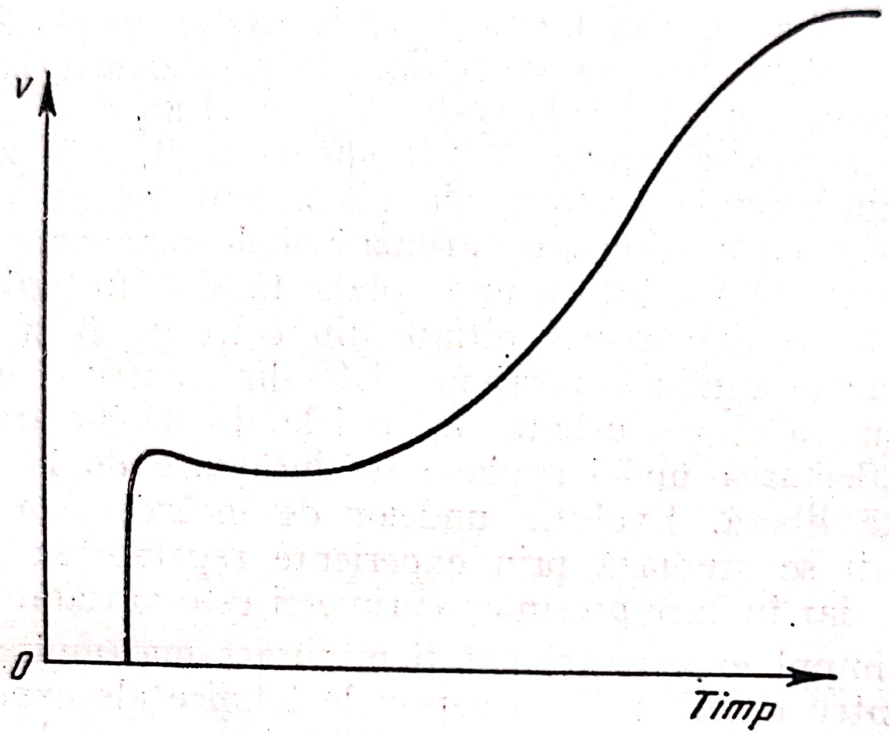


Fig. 2.5.2

Johnson [1969], Johnson și Barker [1969], Barker [1968], Barker, Butcher și Karnes [1966]).

Măsurători de tensiune pe suprafața AA' a epruvetei au condus la rîndul lor la unele concluzii importante: tensiunea este mult mai mare decît cea care ar rezulta din folosirea unei ecuații constitutive clasice, are loc o relaxare a tensiunii etc. (vezi pentru detalii Rohde [1969], Holland [1967], Jones și Mote [1969]).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

Studii numerice pentru determinarea ecuațiilor constitutive

§1. Ecuațiile constitutive sub forma utilizată în calculele numerice

Deoarece în calculele expuse mai jos a existat dorința de a compara datele experimentale atît cu rezultatele obținute cu ajutorul legilor constitutive de tip rate cît și cu cele obținute utilizîndu-se ecuații constitutive ale plasticității clasice, au fost de asemenea utilizate pe lîngă ecuații constitutive de tip rate și mai multe legi constitutive scrise sub formă clasică (independente de timp). Mai jos vom prezenta în primul rînd mai multe asemenea legi, care au jucat un rol important în stabilirea formei ecuației constitutive de tip rate. În toate discuțiile ce urmează în acest capitol va fi vorba mereu de o singură încărcare pornind de la starea $\sigma = \varepsilon = 0$, urmată apoi de o descărcare pînă la $\sigma = 0$. De asemenea deoarece în prezentul capitol exemplele numerice au fost considerate doar pentru compresiune, pentru simplificare s-a convenit ca σ și ε să fie pozitive la comprimare.

În cadrul teoriei clasice a plasticității, în domeniile de încărcare se utilizează relația neliniară (1.1.3) iar în domeniile de descărcare relația (1.1.12). Prin urmare la traversarea frontierei L/U legea constitutivă este schimbată. Remarcăm de asemenea că în domeniile U caracteristicele sînt linii drepte (1.1.22) pe cînd în domeniile L caracteristicele sînt în general linii curbe. Aceasta îngreuiază foarte mult pro-

Scanned with OKEN Scanner

blema rezolvărilor numerice. Înlăturarea acestei dificultăți a fost făcută prin scrierea relației (1.1.3) sub formă diferențială echivalentă (Cristescu [1970])

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \chi\left[(f^{-1}(\sigma))' - \frac{1}{E}\right]\dot{\sigma} = \left[\frac{1}{E} + \Phi(\sigma)\right]\dot{\sigma} \tag{3.1.1}$$

$$\chi(\sigma_m) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad \sigma \leqslant \sigma_Y \quad \text{sau} \quad \sigma_Y \leqslant \sigma < \sigma_m \\ 1 & \text{dacă} \quad \sigma = \sigma_m, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

unde $\sigma_m = \sigma_m(X, t) = \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} \sigma(X, s)$.

Cu ajutorul coeficientului χ definit de (3.1.2) relația constitutivă (3.1.1) va fi utilizată atît în domeniul de încărcare cît și în cel de descărcare.

Ținînd seama de forma (3.1.1) a ecuației constitutive, ecuațiile caracteristicelor atît în domeniul L cît și în U, se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \pm c = \pm\sqrt{\frac{E}{\rho_0(1 + E\Phi)}} \\ &\mathrm{d}X = 0 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

iar relațiile diferențiale satisfăcute de-a lungul lor

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\sigma = \mp \rho_0 c\, \mathrm{d}v \\ &\mathrm{d}\varepsilon^P = \Phi\, \mathrm{d}\sigma \\ &E\, \mathrm{d}\varepsilon^E = \mathrm{d}\sigma. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

De observat că ultima caracteristică (3.1.3) este dublă în domeniul de încărcare și simplă în domeniul de descărcare. De-a lungul ei sînt satisfăcute $(3.1.4)_2$ și $(3.1.4)_3$ în L și doar $(3.1.4)_3$ în U.

Exemplele numerice de care va fi vorba mai jos au fost calculate pentru un anumit tip de aluminiu (numit aluminiu 1100°F cu puritate obișnuită și recopt timp de două ore la 590°C și apoi răcit împreună cu cuptorul — vezi Bell

[1968]). Pentru acest material au fost utilizate următoarele relații (1.1.3) care apoi au fost scrise sub forma (3.1.1)

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon && \text{dacă} \quad \sigma \leqslant \sigma_Y \\ \sigma &= \beta(\varepsilon + \varepsilon_0)^{1/\alpha} && \text{dacă} \quad \sigma \geqslant \sigma_Y \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

unde $E = 7033770$ N/cm², iar $\rho_0 = 0{,}002757\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-4}\ \text{s}^2$ și deci $c_0 = 5080\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pentru celelalte constante următoarele trei seturi de valori au fost utilizate (vezi Cristescu și Bell [1970] și Cristescu [1972 b])

— pentru curba caracteristică numită cvasistatică

$$\begin{aligned} \sigma_{Y0} &= 736{,}8 \ \text{N/cm}^2 \\ \beta &= 22886{,}7 \ \text{N/cm}^2 \\ \alpha &= \frac{8}{3} \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

— pentru curba caracteristică numită „dinamică":

$$\begin{aligned} \sigma_{Y1} &= 212{,}1 \ \text{N/cm}^2 \\ \beta &= 38622 \ \text{N/cm}^2 \\ \alpha &= 2 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

— pentru o curbă dinamică translatată

$$\begin{aligned} \sigma_{Y2} &= 758{,}7 \ \text{N/cm}^2 \\ \beta &= 38622 \ \text{N/cm}^2 \\ \alpha &= 2 \\ \varepsilon_0 &= 0{,}000278. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Cele trei seturi de valori au fost obținute experimental. Valorile (3.1.6) au fost obținute în încercări statice efectuate cu aparate standardizate. Valorile (3.1.7) au fost obținute în experiențe dinamice în două moduri: prin măsurarea vitezei cu care se propagă într-o bară diverse mărimi ale deformației și prin punerea în corespondență, pentru diverse viteze de lovire, a deformațiilor la platou și a tensiunilor la platoul corespunzător (vezi Cap. II, § 2, Cap. IV, § 5).

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece limita reală de plasticitate pentru aluminiul considerat este σ_{Y2}, au fost considerate și setul de valori (3.1.8); curba caracteristică ce se obține în acest fel nu diferă în mod esențial de cea dinamică, decît în imediata vecinătate a limitei de plasticitate.

În domeniul de descărcare a fost utilizată (1.1.12) cu valoarea lui E dată mai sus.

În ceea ce privește ecuațiile constitutive de tip rate, în calculele numerice ele au fost utilizate chiar sub forma (1.2.1) adică

$$\dot{\varepsilon} = \left[\frac{1}{E} + \Phi(\sigma, \varepsilon)\right]\dot{\sigma} + \Psi(\sigma, \varepsilon). \tag{3.1.9}$$

Coeficientul $\Psi(\sigma, \varepsilon)$ a fost presupus a depinde liniar de supratensiune (Cristescu [1972 b])

$$\Psi(\sigma, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{k(\varepsilon)}{E}[\sigma - f(\varepsilon)] & \text{dacă } \sigma > f(\varepsilon) \text{ și } \varepsilon \geqslant \frac{\sigma}{E} \\ 0 & \text{dacă } \sigma \leqslant f(\varepsilon) \end{cases} \tag{3.1.10}$$

unde pentru frontiera de relaxare s-au utilizat expresii sugerate de formulele (3.1.6) — (3.1.8), în felul următor

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_Y & \text{dacă } \varepsilon \leqslant \varepsilon_Y \\ \beta(\varepsilon + \varepsilon_0)^{1/\alpha} & \text{dacă } \varepsilon \geqslant \varepsilon_Y. \end{cases} \tag{3.1.11}$$

Deoarece unele comparații cu datele experimentale au sugerat o ușoară modificare a acestei frontiere în vecinătatea limitei de plasticitate, a mai fost utilizată și expresia

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_Y & \text{dacă } \varepsilon \leqslant \varepsilon_Y \\ \sigma_Y + \frac{\beta}{2}\varepsilon_z^{-1/2}(\varepsilon - \varepsilon_Y) & \text{dacă } \varepsilon_Y \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_z \\ \beta\varepsilon^{1/\alpha} & \text{dacă } \varepsilon_z \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{3.1.12}$$

cu

$$\varepsilon_z = \left(\frac{\beta\varepsilon_Y}{\sigma_Y - \sqrt{\sigma_Y^2 - \varepsilon_Y\beta^2}}\right)^2. \tag{3.1.13}$$

Această modificare a frontierei de relaxare produce o urcare a frontierei în vecinătatea limitei de plasticitate. Deci în

acest caz frontiera este aproximată prin două segmente de dreaptă și o parabolă de tipul (3.1.7).

Coeficientul $k(\varepsilon) \geqslant 0$ poate fi considerat într-o primă aproximație, mai ales pentru deformații mari, a fi constant. Totuși pentru o descriere mai precisă a fenomenelor de deformare pentru stări de deformare vecine de ε_Y, $k(\varepsilon)$ trebuie să fie presupus crescător cu ε. Expresiile utilizate pentru $k(\varepsilon)$ și care au fost sugerate de datele experimentale, furnizează pentru k valori aproape constante pentru deformații mari și valori mici (sau chiar foarte mici) pentru deformații vecine cu ε_Y. Astfel a fost utilizată expresia

$$k(\varepsilon) = k_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\hat{\varepsilon}}\right)\right] \tag{3.1.14}$$

unde k_0 și $\hat{\varepsilon}$ sînt constante ale materialului. O altă expresie care poate fi adaptată mai ușor datelor experimentale este

$$k(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \\ k_1 & \text{dacă } \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1 \\ k_2 + \dfrac{k_1 - k_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}(\varepsilon - \varepsilon_2) & \text{dacă } \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2 \\ k_2 & \text{dacă } \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon \end{cases} \tag{3.1.15}$$

cu k_1, k_2, ε_0, ε_1, ε_2 constante pozitive. Vom observa că pentru unele materiale s-ar putea ca $k_1 = 0$ și că în general $\varepsilon_0 = \varepsilon_Y$. Dacă însă $\varepsilon_0 > \varepsilon_Y$ iar $k_1 \neq 0$ atunci modelul considerat descrie așa numita proprietate de „plasticitate întîrziată". Pentru aluminiul considerat s-a luat $\varepsilon_0 = \varepsilon_Y$ iar $\varepsilon_1 \approx 3\varepsilon_Y$, ε_2 fiind cu un ordin de mărime mai mare (unele din valorile numerice considerate sînt date în tabelul 3.1).

Determinarea expresiei lui Φ din datele experimentale este o problemă mult mai dificilă. Aparent Φ ar putea fi determinat din viteza de propagare (1.2.8) a undelor vîscoplastice. Totuși experimental nu se pot determina aceste viteze pentru orice stare dinamică de tensiune și deformare. Deci Φ va trebui determinat indirect cunoscînd doar curbele experimentale de variație în timp ale lui ε sau v pentru diverși X fixați (vezi Cap. II, § 2) precum și variația tensiunii la capătul barei. S-au căutat unele expresii relativ simple

Tabelul 3.1

Nr. exemplului	Formule folosite	Constante folosite
1	(3.1.9), (3.1.10) (3.1.12), (3.1.15) (3.1.16), (3.1.19) (1.2.33)	$\sigma_Y = 1033$ N/cm², $\varepsilon_Y = 0.0001471$, $\varepsilon_z = 0{,}002575$, $\alpha = 2$, $\beta = 38622$ N/cm², $k_1 = 10^5$, $k_2 = 10^6$, $\varepsilon_1 = 0{,}0005$, $\varepsilon_2 = 0{,}004$, $m = 22390$ N/cm², $n = 62010$ N/cm², $h = 0{,}00003$, $\lambda = -0{,}00019$
2	(3.1.9), (3.1.10) (3.1.12), (3.1.15) (1.2.34), (3.1.19) (1.2.33)	aceleași ca la exemplul 1, în afară de $h = 0$, $\lambda = 0$, și $\underset{\vee}{\varepsilon} = 0$.
3	aceleași ca în exemplul 2	aceleași ca în exemplul 2 în afară de $\underset{\vee}{\varepsilon} = 0{,}0004$

pentru curba instantanee (1.2.5) care să satisfacă (1.2.31) precum și datele experimentale menționate. Alte condiții ce trebuie să fie satisfăcute de către Φ datorită altor rezultate experimentale, vor fi discutate în Cap. IV.

Drept expresii pentru Φ utilizate în exemplele numerice, în afară de (1.2.34) mai citățm (Cristescu [1972 b])

$$\Phi(\varepsilon, \sigma_m) = \chi \left\{ \frac{3\left[\varepsilon - \varepsilon_Y - \varepsilon^* + \left(\frac{a}{3E}\right)^{3/2}\right]^{2/3}}{a} - \frac{1}{E} \right\} \tag{3.1.16}$$

cu

$$a = m + n\sqrt{\varepsilon} \tag{3.1.17}$$

iar m și n sînt constante. ε^* este un prag al deformațiilor ce va fi definit mai jos prin (3.1.19).

Altă expresie ce a fost utilizată este

$$\Phi(\sigma, \varepsilon, \sigma_m) = \chi \frac{\gamma}{E}\left[3\left(\frac{E}{p + q\sqrt{\varepsilon}}\right)^3 \left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 - 1\right] \tag{3.1.18}$$

unde p, q și γ sînt constante. Cazul ecuației constitutive semiliniare a fost obținut utilizînd (3.1.18) cu $\gamma = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

În ceea ce privește factorul χ el este definit de (1.2.33) iar σ^* este un prag al tensiunii, astfel încît pentru $\sigma \leqslant \leqslant f(\varepsilon) + \sigma^*$ să avem $\Phi = 0$. În mai multe exemple s-a luat $\sigma^* = 0$, dar în general s-a presupus că $\sigma^*(\varepsilon)$ este definit de

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E} = h - \lambda \sqrt{\left| \varepsilon - f^{-1}\left[\frac{\sigma_Y}{E} + h\right]\right|} \qquad (3.1.19)$$

cu h și λ constante. ε^* ce intervine în (3.1.16) este și el definit de (3.1.19). Pentru valorile diverselor constante vezi Tabelul 3.1.

§2. Condiții inițiale și la limită

Calculele numerice au fost făcute pentru cazul lovirii simetrice a două bare identice, deoarece pentru acest caz erau disponibile foarte multe date experimentale obținute de J. F. Bell (vezi Cap. II, § 2). Din punctul de vedere al redactării programului, cazul lovirii simetrice este mai simplu de considerat deoarece din cauza simetriei calculele se pot face doar în una din cele două bare. Vom presupune că bara în care se fac calculele, numită epruvetă, este la momentul inițial în repaus și nedeformată, iar lungimea inițială este l. Prin urmare

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ 0 \leqslant X \leqslant l \end{matrix}\right\}: \quad \sigma = \varepsilon = v = 0 \qquad (3.2.1)$$

sînt condițiile inițiale considerate.

În ceea ce privește condițiile la limită, capătul $X = l$ al barei va fi presupus liber, deci

$$\left.\begin{matrix} X = l \\ t \geqslant 0 \end{matrix}\right\}: \quad \sigma = 0 \qquad (3.2.2)$$

Din (3.2.2) rezultă că pentru orice t avem și $\varepsilon = 0$, iar viteza v va fi calculată cu o subrutină specială utilizată la $X = l$.

La capătul $X = 0$ bara este lovită la momentul $t = 0$ cu o altă bară identică, ce se deplasează cu viteza inițială

Scanned with OKEN Scanner

V dată. Prin urmare condițiile inițiale pentru această ultimă bară sînt

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ -l \leqslant X \leqslant 0 \end{matrix}\right\}: \quad \sigma = \varepsilon = 0, \quad v = V \qquad (3.2.3)$$

Comparînd (3.2.3) cu (3.2.1) se vede că la $t = 0$, la capătul $X = 0$ al barei are loc un salt brusc al vitezei v. Acest salt a fost considerat în două moduri, prin două variante de program. În primul rînd s-a presupus că viteza de lovire V este transmisă epruvetei foarte rapid dar de o manieră continuă. Se alege în mod convenabil un interval scurt de timp $0 \leqslant t \leqslant t_m$ în care are loc creșterea monotonă a vitezei la capătul barei de la zero pînă la v_{max}. În programele făcute, pentru ușurință această creștere a fost luată liniară. Prin urmare condițiile la limită sînt

$$X = 0 \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant t_m: & v = \dfrac{t}{t_m} v_{max} \\ t_m \leqslant t < T_c: & v_H = v_S \\ T_c \leqslant t \quad : & \sigma_S = 0 \end{cases} \qquad (3.2.4)$$

unde t_m este ales în mod convenabil (în exemplele date de cele mai multe ori $t_m = 0{,}5$ μs) iar $v_{max} = V/2$. T_c este o mărime calculată, și anume este „timpul de contact". În intervalul $t_m \leqslant t \leqslant T_c$ cele două bare se mișcă împreună, viteza particulelor la $X = 0$ în cele două bare fiind aceeași. Discutarea condiției $(3.2.4)_2$ și modul cum a fost ea transformată într-o subrutină a programului, este dată în Anexa 1. Condiția $(3.2.4)_2$ este aplicată atît timp cît $\sigma(0, t) > 0$. Reamintim că $\sigma(0, t)$ este calculat cu o subrutină a programului. Timpul minim T_c cînd pentru prima oară $\sigma(0, T_c) = 0$ va fi numit timp de contact. Pentru $t \geqslant T_c$ capătul $X = 0$ al epruvetei devine liber de tensiune și aceasta justifică condiția $(3.2.4)_3$, care la rîndul ei a fost transformată într-o subrutină în vederea obținerii comportării epruvetei după separarea de bara care a lovit-o.

Vom mai menționa că datorită rapidității încărcării pentru aplicarea condițiilor la limită (3.2.4), la capătul $X = 0$ intervalul Δt al rețelei caracteristicilor pe care s-au făcut calculele a fost uneori considerat variabil. Pentru

$0 \leqslant t \leqslant 2$ μs s-a utilizat $\Delta t = \frac{1}{200}$ μs iar apoi în intervalul 2 μs $\leqslant t \leqslant 10$ μs intervalul Δt a fost crescut treptat pînă la $\Delta t = \frac{1}{4}$ μs. Acest ultim interval a fost utilizat în continuare în tot restul calculelor în banda $0 \leqslant X \leqslant l$, $t > 0$.

§3. Unde de șoc

Deoarece condițiile (3.2.1) și (3.2.3) prescriu la $X = 0$, $t = 0$ valori distincte pentru v, această discontinuitate se va propaga în bară sub forma unei unde de șoc. În paragraful precedent s-a arătat cum această discontinuitate a fost considerată în calcule prin introducerea unor condiții la limită de forma (3.2.4), adică introducînd o variație lină dar rapidă la $X = 0$. Totuși, discontinuitatea menționată poate fi considerată în calcule introducînd undele de șoc. Vom discuta problema în primul rînd pentru legi constitutive ale plasticității clasice scrise sub forma (1.1.3).

În cazul legilor constitutive de forma (1.1.3) în care pentru $\sigma \leqslant \sigma_Y$ ecuația constitutivă este liniară (1.1.14), o undă de șoc elastică de comprimare se va propaga în bară cu viteza c_0. La timpul $t = l/c_0$ această undă se reflectă de la capătul $X = l$ și devine o undă de șoc de întindere. În timpul propagării această undă de șoc de întindere va fi treptat absorbită de undele plastice de comprimare ce se propagă din sens invers. Fie X_A secțiunea de bară unde unda de șoc de întindere (și deci de descărcare) va fi complet absorbită (vezi fig. 3.3.1), adică această undă se va propaga în porțiunea $X_A < X \leqslant l$ a barei. Prin urmare pe această porțiune dreapta

$$X = -c_0\left(t - \frac{2l}{c_0}\right), \tag{3.3.1}$$

este chiar frontul undei de șoc reflectată. Deci la traversarea liniei (3.3.1) funcțiile σ, v, și ε vor avea un salt. Pentru a calcula acest salt se calculează întîi soluția problemei în domeniul ce se află sub (3.3.1). Din ecuația caracteristicelor de pantă pozitivă

$$X = c(\sigma)\, t \tag{3.3.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

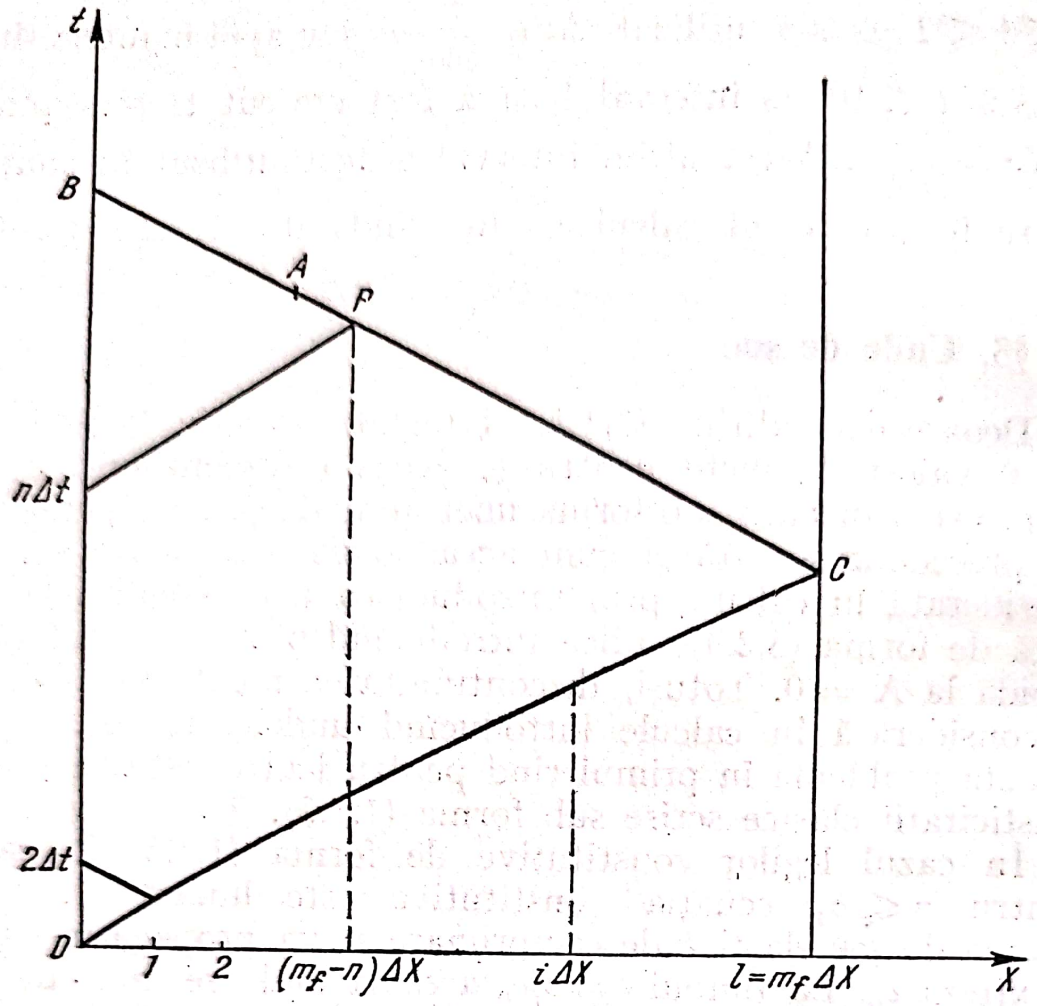


Fig. 3.3.1

relația $(1.1.11)_1$

$$v = + \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\rho_0 c(\sigma)} \tag{3.3.3}$$

și din (3.3.1) se poate obține soluția din domeniul de încărcare de-a lungul liniei (3.3.1) (vezi de exemplu Cristescu [1967] Cap. II). Astfel dacă se utilizează o ecuație constitutivă de tipul (3.1.5) cu $\varepsilon_0 = 0$ se obține (Cristescu [1970])

$$\sigma_b = \frac{\beta^2}{2\rho_0 c_0^2} \frac{t^2}{\left(\frac{2l}{c_0} - t\right)^2}$$

$$v_b = \frac{2}{3\beta}\sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\,\sigma^{3/2} + \left[\frac{1}{\rho_0 c_0} - \frac{2}{3\beta}\sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\sqrt{\sigma_Y}\right]\sigma_Y. \tag{3.3.4}$$

Soluția de-a lungul lui (3.3.1) dar în domeniul de descărcare se poate obține utilizînd condițiile de salt $(A2.10)_1$ și (A2.11) în care $U = -c_0$. Se obține astfel (vezi Lee [1953])

$$\sigma_a = \sigma_b - \frac{1}{2}[2\sigma_Y - (\rho_0 c_0 v_b - \sigma_b)]$$

$$v_a = v_b - \frac{1}{\rho_0 c_0}(\sigma_a - \sigma_b) \tag{3.3.5}$$

$$\varepsilon_a^E = \frac{\sigma_a}{E}, \quad \varepsilon_a^P = \varepsilon_b^P.$$

Formulele (3.3.5) vor furniza valorile tuturor funcțiilor necunoscute de-a lungul dreptei (3.3.1), în domeniul de descărcare. Aceste valori au fost notate cu indicele a, indicele b fiind rezervat domeniului de încărcare. Pentru scrierea formulelor (3.3.5) este însă nevoie să se cunoască și valoarea uneia din funcțiile σ_a, v_a sau ε_a^E într-un punct al lui (3.3.1). Deoarece imediat după reflectarea la $X = l$ și la $t = t_+ = \frac{l}{c_0}$ avem $\sigma_a = 0$, formulele (3.3.5) ne vor furniza pe σ_a, v_a și ε_a^E de-a lungul lui (3.3.1) atît timp cît $\sigma_a \neq \sigma_b$. Calculele se fac în puncte succesive de-a lungul lui (3.3.1) începînd din $X = l$ și $t = \frac{l}{c_0}$. Astfel se obține din calcul și punctul A de pe (3.3.1) unde unda de descărcare este complet absorbită de undele plastice directe. Prin urmare de-a lungul lui (3.3.1) o subrutină a programului bazată pe formulele (3.3.4) și (3.3.5) va furniza soluția pentru porțiunea $X_A \leqslant X \leqslant l$ a barei. Pentru cealaltă porțiune a barei $0 \leqslant X < X_A$ soluția de-a lungul lui (3.3.1) este furnizată de o subrutină bazată pe formulele (3.3.4). Astfel se obține soluția de-a lungul lui (3.3.1) pentru orice $0 \leqslant X \leqslant l$. Aceste date au fost apoi utilizate pentru calculele numerice făcute în banda

$$0 \leqslant X \leqslant l$$

$$X > -c_0\left(t - \frac{2l}{c_0}\right) \tag{3.3.6}$$

$$t < T_c + t_f$$

unde t_f este convenabil ales.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul ecuației constitutive de tip rate problema propagării primei unde de șoc trebuie considerată chiar din punctul $X = 0$, $t = 0$. Pentru ecuații constitutive semiliniare propagarea primei unde de șoc a fost studiată încă de Sokolovski [1948 a, b] și Malvern [1951 a, b]. Ei observă că condițiile de salt pentru ecuații semiliniare (de tipul (1.2.1) dar cu $\Phi = 0$) sînt

$$\begin{aligned} \rho_0 c_0 [v] &= [\sigma] \\ c_0 [\varepsilon] &= [v] \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

adică viteza de propagare a undei de șoc coincide cu viteza c_0 a undelor de accelerație. Prin urmare de-a lungul caracteristicei

$$X = c_0 t \tag{3.3.8}$$

în intervalul $0 \leqslant X \leqslant l$ sînt satisfăcute atît (3.3.7) cît și relația diferențială $(1.2.10)_1$. Deoarece condițiile la limită sînt date în viteze, din (3.2.3) și (3.2.1) se poate calcula saltul $[v]$, și apoi salturile $[\sigma]$ și $[\varepsilon]$ în punctul $X = 0$, $t = 0_+$ se obțin utilizînd (3.3.7). Apoi (1.2.10) se poate integra de-a lungul lui (3.3.8)

$$-\sigma + \sigma_0 = \rho_0 c_0 (v - v_0) - \int_0^t \psi(\sigma, \varepsilon)\, dt \tag{3.3.9}$$

unde σ_0 și v_0 sînt valorile în $X = 0$, $t = 0_+$ iar $\psi \leqslant 0$ conform cu (1.2.3). Din (3.3.9) prin diferențiere în raport cu t și ținînd seama de relațiile (3.3.7) se obține ecuația diferențială

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2E} \psi(E\varepsilon, \varepsilon), \qquad t \in \left[0, \frac{l}{c_0}\right] \tag{3.3.10}$$

cu condiția inițială $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = v_0/c_0$. Această ecuație diferențială va furniza descreșterea lui ε de-a lungul caracteristicei (3.3.8) pornind de la valoarea ε_0. După determinarea lui ε, valorile lui σ și v de-a lungul aceleași caracteristice se vor determina din formulele (3.3.7) adică

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + c_0(\varepsilon(t) - \varepsilon_0) \\ \sigma(t) &= E\varepsilon(t). \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

La timpul $t = l/c_0$ unda de șoc (3.3.9) se reflectă de la capătul liber ca o undă de șoc de descărcare de ecuație

$$X = -c_0 t + 2l. \tag{3.3.12}$$

Deasupra acestei unde, în punctul C, (fig. 3.3.1) tensiunea este $\sigma_a = 0$ și deoarece unda (3.3.12) este de descărcare rezultă că în acest punct $E\varepsilon_a = \sigma_a = 0$ iar v_a se calculează din (3.3.7) și este

$$v_a = v_b + c_0 \varepsilon_b = 2c_0 \varepsilon_b \tag{3.3.13}$$

unde $\varepsilon_b = \varepsilon(l/c_0)$ și $v_b = v(l/c_0)$ se obține respectiv din (3.3.10) și (3.3.11). Valorile lui $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ și $v(t)$ determinate conform formulelor (3.3.10) și (3.3.11) precum și condiția ca $v(0,t) = v_0$ pentru $0 \leqslant t \leqslant 2l/c_0$ se folosește pentru integrarea sistemului (1.2.12) în triunghiul OCB

$$\begin{gathered} 0 \leqslant X \leqslant l \\ X < c_0 t, \quad X < -c_0 t + 2l \\ t > 0. \end{gathered} \tag{3.3.14}$$

Astfel se determină valorile $\sigma_b(t)$, $\varepsilon_b(t)$ și $v_b(t)$ de-a lungul lui (3.3.12). Utilizînd acum relațiile (3.3.7) și valorile particulare ale lui v_a, σ_a și ε_a în punctul C se pot determina $\sigma_a(t)$, $\varepsilon_a(t)$ și $v_a(t)$ de-a lungul lui (3.3.12) printr-o integrare dinspre C spre B. Punctul A este definit ca punctul în care $\varepsilon_a = \varepsilon_b$ și deci din (3.3.7) $\sigma_a = \sigma_b$ și $v_a = v_b$.

Să examinăm acum propagarea undei de șoc printr-un material ce satisface o ecuație constitutivă cvasiliniară de forma (1.2.2)

$$\dot{\sigma} = \varphi(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon} + \psi(\sigma, \varepsilon). \tag{3.3.15}$$

Vom reexamina propagarea undei de șoc presupunînd că inițial bara este în stare naturală de repaus. Dacă se urmează procedeul indicat la Cap. IV, §3, atunci ecuația (3.3.15) se poate pune sub forma funcțională (vezi (4.3.19))

$$\sigma(t) = f(\varepsilon(t), \tau(t)) \tag{3.3.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\tau(t)$ este parametrul istoriei, și el depinde de istoria deformației pe intervalul $[0, t)$ pentru un X fixat. Funcția f din (3.3.16) verifică ecuația

$$\frac{\partial f(\varepsilon, \tau)}{\partial \varepsilon} = \varphi(f(\varepsilon, \tau), \varepsilon).$$

Curba

$$\sigma = f(\varepsilon, 0) \tag{3.3.17}$$

din planul σ, ε se numește curbă instantanee în raport cu starea naturală de repaus și este determinată ca soluție a ecuației

$$\frac{\partial f(\varepsilon, 0)}{\partial \varepsilon} = \varphi(f(\varepsilon, 0), \varepsilon), \quad f(0, 0) = 0. \tag{3.3.18}$$

Depinzînd de proprietățile descrise de funcția φ, soluția $\sigma = f(\varepsilon, 0)$ a ecuației (3.3.18) ar putea: coincide cu dreapta

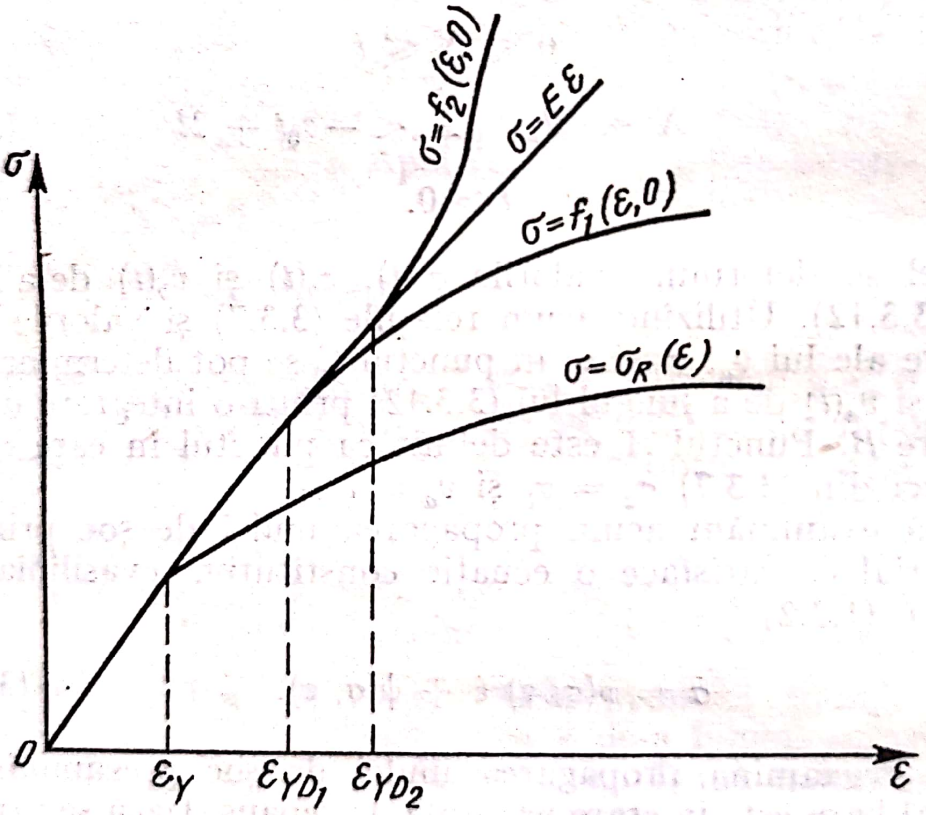


Fig. 3.3.2

lui Hooke $\sigma = E\varepsilon$; să aibă concavitatea în jos sau în sus (vezi fig. 3.3.2). În cele ce urmează vom considera că oricare din cele trei situații este cu putință, dar vom presupune

că în toate aceste trei situații există un interval $[0, \varepsilon_{YD}]$ în care funcția f este liniară și deci (3.3.17) coincide cu dreapta lui Hooke pe acest interval. Aici ε_{YD} ar putea fi interpretat ca deformația corespunzătoare unei anumite limite dinamice de neliniaritate. În fig. 3.3.2 sînt reprezentate curba de relaxare $\sigma = \sigma_R(\varepsilon)$ și cele trei situații referitoare la forma curbei instantanee, așa cum a fost discutată mai sus.

Pentru a descrie propagarea undei de șoc, vor fi folosite relațiile de salt (A2.10) și (A2.11)

$$\begin{aligned} \rho_0 U[v] - [\sigma] &= 0 \\ [v] - U[\varepsilon] &= 0 \\ \sigma &= f(\varepsilon, 0). \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

$U(\varepsilon)$ este viteza de propagare a undei de șoc, și ea este variabilă în cazul cînd există unda de șoc, adică atunci cînd f are concavitatea spre σ pozitiv.

Pentru descrierea tuturor celor trei situații menționate mai sus ne vom referi la fig. 3.3.1 în care OC ar putea de data aceasta să nu fie o linie dreaptă. În cazul condițiilor inițiale (3.2.1) și a condițiilor la limită

$$\begin{aligned} v(0, t) &= v_0, \qquad t > 0 \\ \sigma(l, t) &= 0, \qquad t > 0 \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

condițiile de salt (3.3.19) ne furnizează în lungul lui OC

$$\begin{aligned} \rho_0 U v_a - f(\varepsilon_a, 0) &= 0 \\ v_a - U\varepsilon_a &= 0 \\ \rho_0 U^2 &= \frac{f(\varepsilon_a, 0)}{\varepsilon_a}. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Revenind la ecuațiile de mișcare (1.1.1) și ecuațiile de compatibilitate (1.1.2) în care ținem seama de (3.3.16), se obține de-a lungul lui OC

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a + c^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial X}\right)_a &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial f}{\partial \tau}(\varepsilon, 0) \left(\frac{\partial \tau}{\partial X}\right)_a \\ \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_a + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)_a &= 0. \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă derivăm pe v și ε în lungul lui OC se obține

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a + U\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)_a = \frac{dv_a}{dt}$$
$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_a + U\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial X}\right)_a = \frac{d\varepsilon_a}{dt}. \tag{3.3.23}$$

Ținînd seama de (4.3.12) și de faptul că τ este continuu la traversarea undei de șoc, putem scrie

$$\left[\frac{\partial \tau}{\partial t}\right] + U\left[\frac{\partial \tau}{\partial X}\right] = \frac{d[\tau]}{dt} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \psi(f(\varepsilon, \tau), \varepsilon). \tag{3.3.24}$$

Deoarece $\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_b = \left(\frac{\partial \tau}{\partial X}\right)_b = 0$ și deoarece din $(3.3.24)_2$ rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(\varepsilon_a, 0)\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_a = \psi(f(\varepsilon_a, 0), \varepsilon_a) \tag{3.3.25}$$

se obține

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(\varepsilon_a, 0)\left(\frac{\partial \tau}{\partial X}\right)_a = -\frac{1}{U}\psi(f(\varepsilon_a, 0), \varepsilon_a). \tag{3.3.26}$$

Din (3.3.23) și $(3.3.22)_2$ obținem

$$\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)_a = -\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_a = -\frac{d\varepsilon_a}{dt} + U\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial X}\right)_a$$

și

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a = \frac{dv_a}{dt} + U\frac{d\varepsilon_a}{dt} - U^2\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial X}\right)_a. \tag{3.3.27}$$

Acum din $(3.3.22)_1$, ,(3.3.26) și (3.3.27) rezultă

$$\frac{dv_a}{dt} + U\frac{d\varepsilon_a}{dt} = \frac{1}{\rho_0 U}\psi(f(\varepsilon_a, 0), \varepsilon_a) + (U^2 - c^2)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial X}\right)_a. \tag{3.3.28}$$

Scanned with OKEN Scanner

Utilizînd $(3.3.21)_2$ în (3.3.28) putem elimina pe v_a și obținem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U(\varepsilon_a), \varepsilon_a) + U(\varepsilon_a)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho_0 U(\varepsilon_a)}\psi(f(\varepsilon_a, 0), \varepsilon_a) + \\ + (U^2 - c^2)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial X}\right)_a \qquad (3.3.29)$$

unde $U(\varepsilon_a)$ este dat de $(3.3.21)_3$. Fiind dată condiția inițială $v_a(0) = v_0$ în (3.3.20), din $(3.3.21)_2$ se obține condiția inițială pentru ecuația (3.3.29)

$$\varepsilon_a(0) = \varepsilon_0 \qquad (3.3.30)$$

unde ε_0 rezultă din

$$\rho_0 v_0^2 = f(\varepsilon_0, 0)\ \varepsilon_0. \qquad (3.3.31)$$

În formula (3.3.29) se vede că în cazul semiliniar, cînd $c = U$ se obține formula (3.3.10). Spre deosebire de cazul semiliniar unde ε în lungul undei de șoc este determinat doar de cunoașterea condiției inițiale $\varepsilon_a(0) = \varepsilon_0$, aici în ecuația pentru determinarea lui ε intră și derivata acestuia în raport cu X și în principiu nu poate fi determinat decît odată cu determinarea soluției complete deasupra curbei OC. Acest rezultat a fost obținut, pentru materiale de tip rate de Ahrens și Duvall [1966]. La concluzii similare se ajunge și pentru alte materiale neliniare (vezi de exemplu Chen și Gurtin [1972]).

Ecuația (3.3.29) cu toate că nu permite determinarea deformației în lungul undei de șoc doar din cunoașterea deformației inițiale ea este totuși un rezultat important din punct de vedere al ecuațiilor constitutive. Aceasta se datorează faptului că în ecuații sînt conținute atît informații asupra răspunsului instantaneu, prin intermediul lui $U(\varepsilon)$, cît și informații asupra proprietăților de relaxare a materialului datorită prezenței funcției ψ. De fapt există tehnici experimentale care permit determinarea în același timp a deformației ε și a lui $\partial\varepsilon/\partial X$ prin măsurarea unghiului dintre normalele la suprafața laterală a barei înainte și imediat după trecerea undei de șoc (vezi Cap. II, §2 și de asemenea Cap. IV, §5).

Așa cum se va vedea în Cap. IV, §4 funcția $f(\varepsilon, 0)$ poate fi considerată într-o primă aproximație ca fiind determinată

Scanned with OKEN Scanner

odată cu cunoașterea a două constante ale materialului. Prin urmare, ecuația (3.3.29) poate fi folosită pentru determinarea funcției ψ în lungul curbei de răspuns instantaneu a materialului, dacă se cunosc suficiente date experimentale în lungul undei de șoc pentru ϵ_a și $(\partial\epsilon/\partial X)_a$.

Dacă se cunoaște $\varepsilon_a = \varepsilon_a(t)$, atunci din $(3.3.21)_2$ se găsește $v_a = v_a(t)$ iar din $(3.3.19)_3$ $\sigma_a = \sigma_a(t)$.

Din

$$\frac{dX}{dt} = c(\varepsilon_a(t)), \quad X(0) = 0 \tag{3.3.32}$$

se găsește ecuația undei de șoc OC.

§4. Exemple numerice

În prezentul paragraf vor fi prezentate rezultatele calculelor numerice făcute utilizîndu-se modele de tip rate de forma (1.2.1). Trei exemple vor fi date (Cristescu [1974 a]); expresiile utilizate pentru coeficienți cît și valorile numerice ale diverselor constante sînt date în tabelul 3.1. În tabelul 3.2 sînt date unele valori numerice obținute prin calcul pentru diverși parametri ce intervin în cele trei exemple considerate, cît și valorile experimentale corespunzătoare. Toate datele experimentale menționate în prezentul paragraf sînt datorite lui J. F. Bell.

Deoarece variația în timp a deformației la diverși X de-a lungul barei este obținută cu metoda optică a rețelelor de difracție, s-a considerat că aceste rezultate sînt obținute cu mare precizie, și prin urmare li s-a dat o mare pondere în determinarea coeficienților din ecuația constitutivă. Aceste curbe obținute la diverse secțiuni X ($3D$ este secțiunea ce se află la 3 diametri de capătul lovit etc.) sînt date în fig. 3.4.1. Prin cerculețe sînt reprezentate datele experimentale, iar săgețile verticale marchează timpii de contact. Începuturile curbelor din fig. 3.4.1 nu au fost reprezentate pe această figură. Deoarece alura începuturilor acestor curbe (pentru deformații mici) este de mare importanță pentru stabilirea ecuației constitutive, mai ales pentru secțiunile apropiate de capătul lovit, ele au fost date separat în fig. 3.4.2 (nu am avut la dispoziție date experimen-

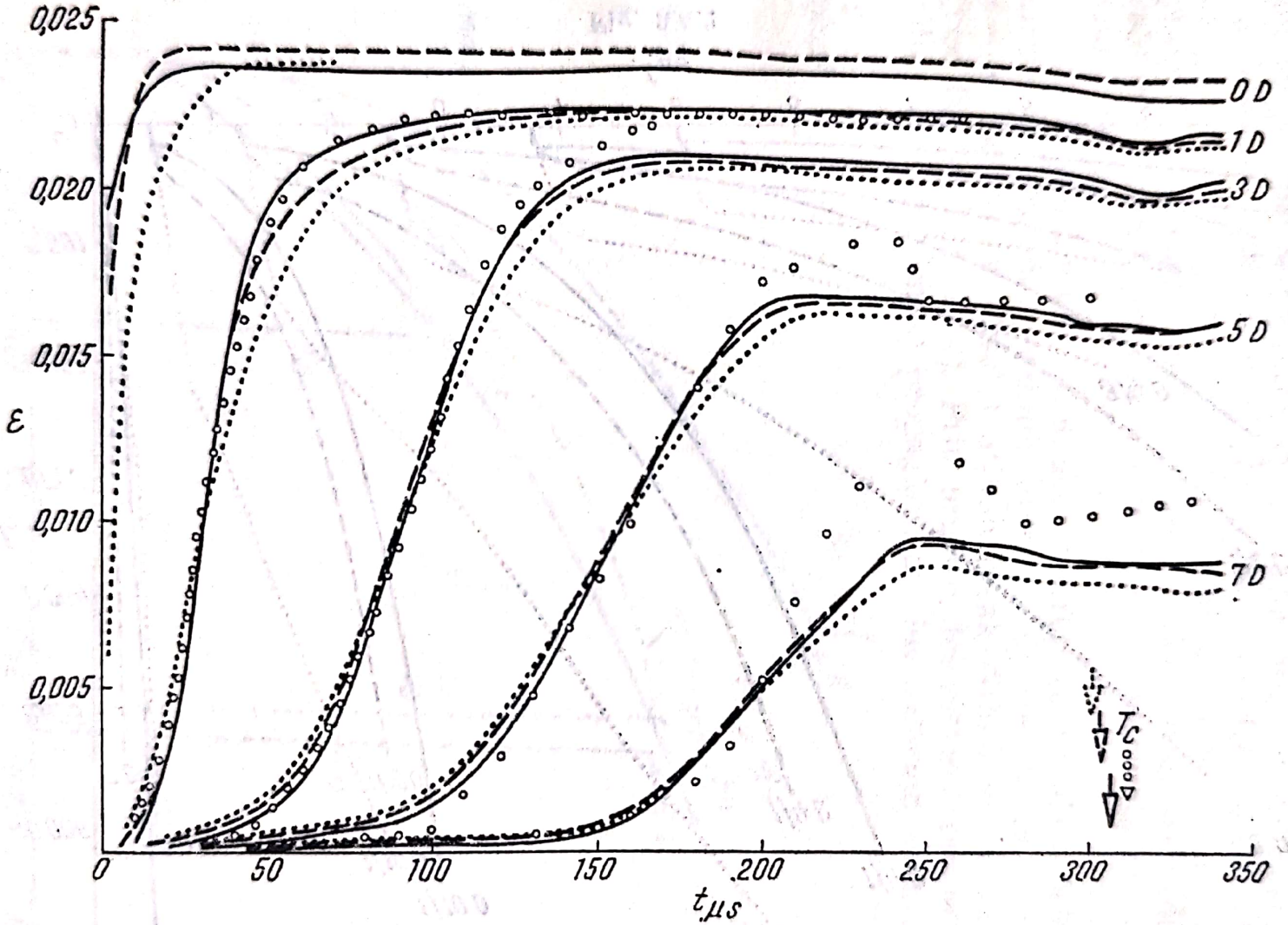


Fig. 3.4.1

Scanned with OKEN Scanner

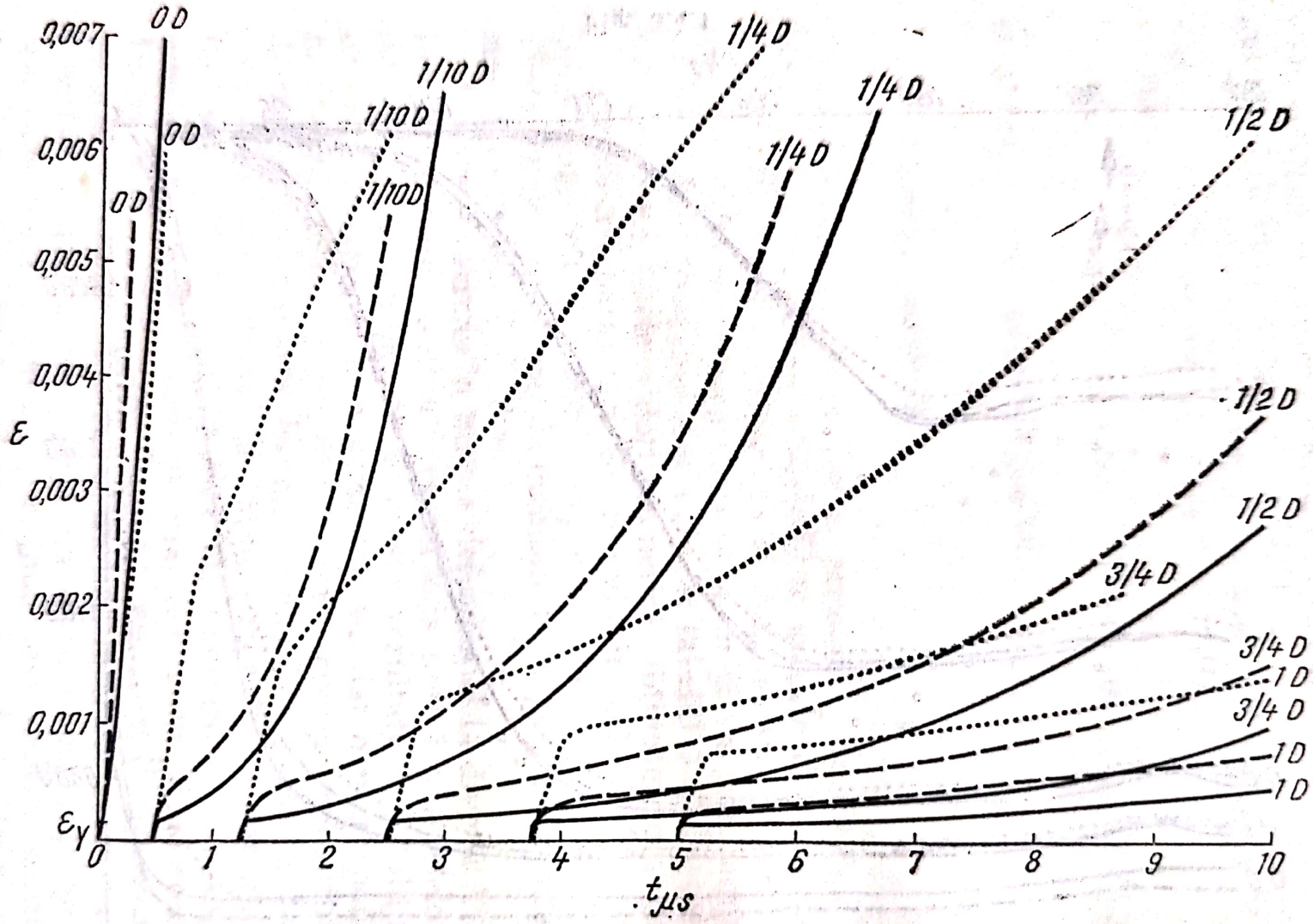
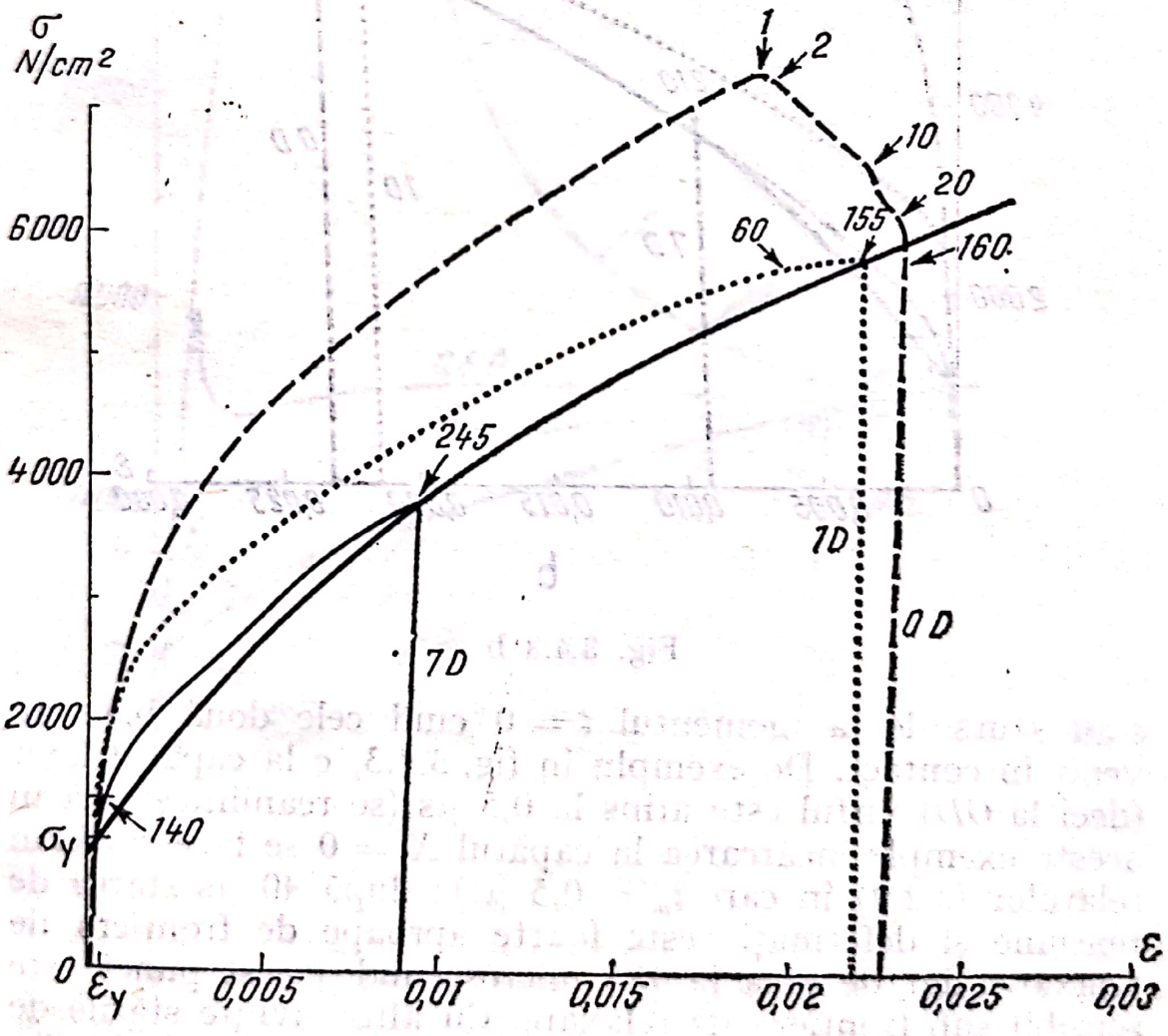

0,007
0,006
0,005
0,004
0,003
0,002
0,001
ε
εy
0 D
1/10 D
1/4 D
1/2 D
3/4 D
1 D
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
tμs

Fig. 3.4.2

tale certe pentru a face o comparație). Se poate remarca că prima creștere rapidă și aparent liniară a deformației, o face să crească mult peste deformația corespunzătoare limitei statice de plasticitate. Acest prim prag al deformației va fi numit „precursor elastic". Din fig. 3.4.2 rezultă clar că precursorul elastic descreşte destul de rapid pe măsura propagării în bară, tinzînd către ε_Y. Din punct de vedere calitativ și acest rezultat a fost găsit experimental de mai mulți autori.

La capătul lovit al barei, această creștere inițială a deformației corespunde porțiunii aproape liniare de pe curba $\sigma \sim \varepsilon$, înainte ca vîrful tensiunii (peak stress) să fie atins (vezi fig. 3.4.3, a, b, c). Prin urmare, descreșterea precursorului elastic în timpul propagării, are loc oarecum simultan



a

Fig. 3.4.3 a

cu descreșterea vîrfului tensiunii în timpul propagării. În fig. 3.4.3 liniile groase reprezintă frontiera de relaxare, iar numerele scrise de-a lungul curbelor indică cîte microsecunde

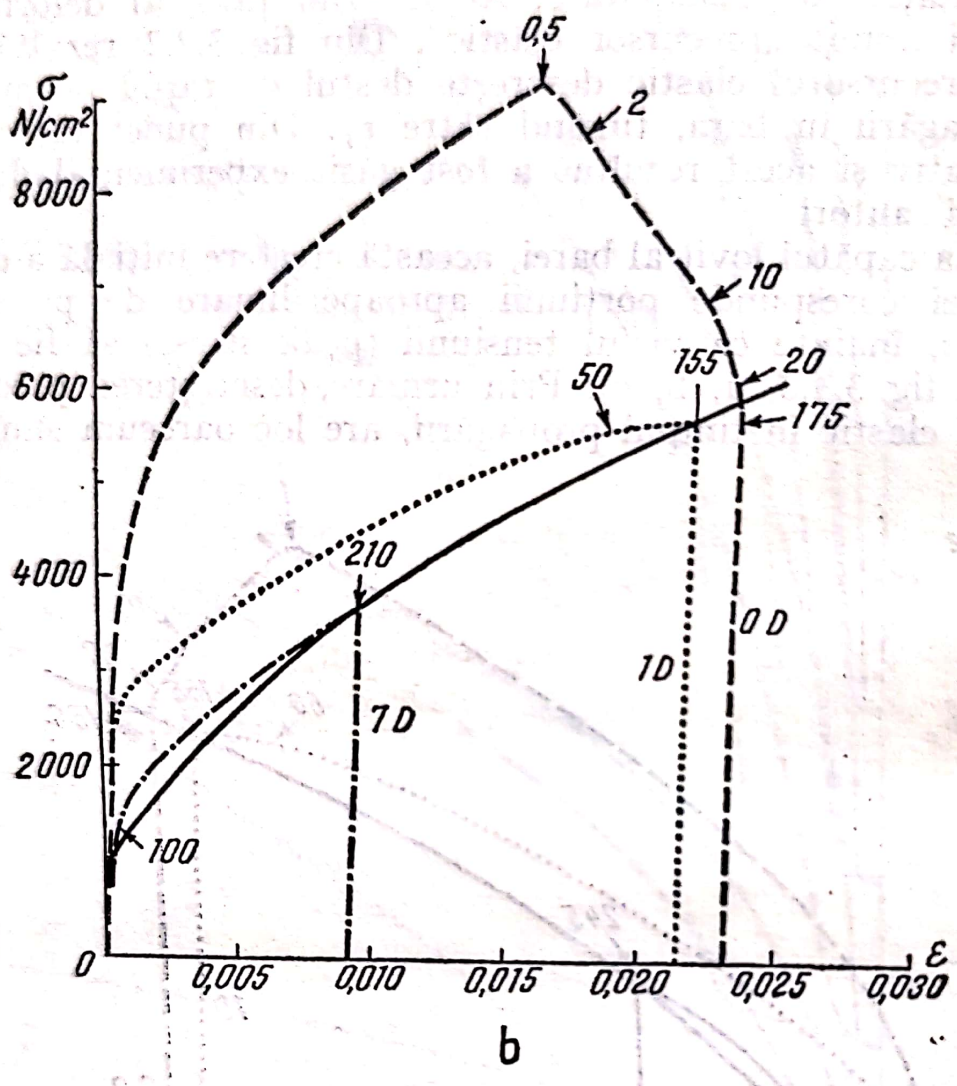
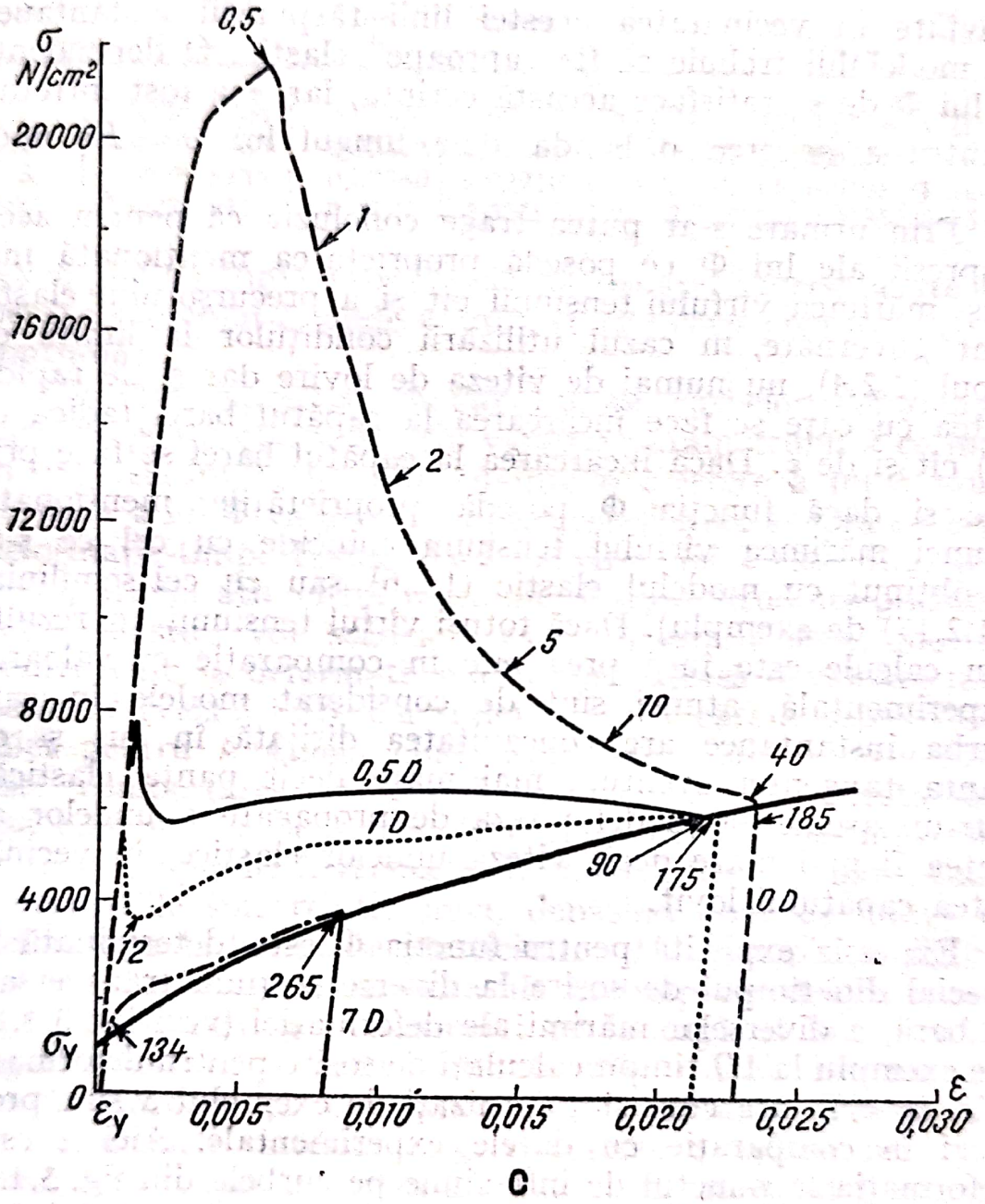


Fig. 3.4.3 b

s-au scurs de la momentul $t = 0$ cînd cele două bare au venit în contact. De exemplu în fig. 3.4.3, c la capătul lovit (deci la OD) vîrful este atins la 0,5 μs (se reamintește că în aceste exemple încărcarea la capătul $X = 0$ se face conform relațiilor (3.2.4) în care $t_m = 0{,}5$ μs); după 40 μs starea de tensiune și deformație este foarte aproape de frontiera de relaxare, dar de abia la 185 microsecunde acest punct este sensibil sub frontiera de relaxare. Cu alte cuvinte stările de tensiune și deformație de pe frontiera de relaxare (și din imediata ei vecinătate) sînt stări cvasistabile.

Din fig. 3.4.2 (liniile continue) și fig. 3.4.3,a rezultă că expresia (3.1.16) pentru Φ nu descrie satisfăcător fenomenul vîrfului tensiunii, deși în general această soluție este



c

Fig. 3.4.3. c

rezonabil de bine în concordanță cu datele experimentale și în multe situații ea practic se suprapune peste soluția obținută cînd este utilizată expresia (1.2.34) pentru Φ. Prin urmare dacă dorim să descriem mai precis atît feno-

menul vîrfului tensiunii cît și alura inițială a curbelor deformație-timp, trebuie să alegem o expresie pentru funcția Φ care să se anuleze sau să fie neglijabilă de-a lungul dreptei $\sigma = E\varepsilon$, și eventual chiar într-o vecinătate a ei. Cu alte cuvinte în vecinătatea acestei linii răspunsul instantaneu al modelului trebuie să fie „aproape" elastic. O dependență a lui Φ de ε_p satisface această cerință, iar $\overset{\vee}{\varepsilon}$ a fost introdus pentru a se crea o bandă de-a lungul lui $\sigma = E\varepsilon$ unde $\Phi = 0$.

Prin urmare s-ar putea trage concluzia că pentru acele expresii ale lui Φ ce posedă proprietatea menționată mai sus, mărimea vîrfului tensiunii cît și a precursorului elastic sînt guvernate, în cazul utilizării condițiilor la limită de tipul (3.2.4), nu numai de viteza de lovire dar și de rapiditatea cu care se face încărcarea la capătul barei (adică de t_m) cît și de $\overset{\vee}{\varepsilon}$. Dacă încărcarea la capătul barei se face prin șoc și dacă funcția Φ posedă proprietățile menționate, atunci mărimea vîrfului tensiunii coincide cu cel ce s-ar fi obținut cu modelul elastic (1.2.6) sau cu cel semiliniar ((1.2.17) de exemplu). Dacă totuși vîrful tensiunii ce rezultă din calcule este încă prea mic în comparație cu valoarea experimentală, atunci sînt de considerat modele în care curba instantanee are concavitatea dirijată în sus și cu panta tangentei eventual mai mare decît panta elastică; într-un asemenea model viteza de propagare a undelor ar putea fi mai mare decît viteza undelor elastice, în vecinătatea capătului lovit.

Expresia explicită pentru funcția Φ este determinată în special din timpul de sosire la diverse secțiuni transversale în bară, a diverselor mărimi ale deformației (vezi fig. 3.4.1). De exemplu la $1D$ timpii calculați de sosire pentru deformații mici ($\varepsilon < \overline{\varepsilon}$) așa cum sînt furnizați de exemplul 3 sînt prea mari în comparație cu datele experimentale. Aici $\overline{\varepsilon}$ este deformația la punctul de inflexiune pe curbele din fig. 3.4.1, iar unele valori numerice pentru ε sînt date în tabelul 3.2. Pentru deformații mai mari (adică cînd $\varepsilon > \overline{\varepsilon}$) situația se inversează. În cazul exemplului 3 ambele efecte sînt datorite faptului că în general Φ este puțin prea mic (linie punctată). Pentru a îmbunătăți soluția ar trebui crescut Φ, de exemplu prin modificarea coeficientului a sau prin descreșterea lui $\overset{\vee}{\varepsilon}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3.2

Nr. exemplului	σ_{max} vîrf N/cm²	σ_{max} platou N/cm²	ε_{max} vîrf	ε_{max} platou	T_c μs	v_f m/s	$\bar{\varepsilon}$ $x=1D$	Pătrunderea reg. de desc.
1	7158	5783	0,02359	0,02248	306,5	22,46	0,0108	4 D
2	9284	5763	0,02403	0,02229	303,0	22,42	0,0107	4,25 D
3	20999	5738	0,02360	0,02210	301,0	22,41	0,0101	4,25 D
exp.	29627	5719	~0,0275	0,0219	310,8	22,63	0,0135	4~5 D

(exemplul 2) (linie întreruptă). O situație inversată are loc pentru exemplul 1, unde Φ utilizat este ceva prea mare (linie continuă).

Un efect oarecum similar asupra curbelor deformație-timp se poate obține și prin variația parametrului k ce intră în expresia lui Ψ. Cu alte cuvinte, o creștere a lui k sau o creștere a lui Φ va avea în mare același efect asupra curbelor deformație-timp. Totuși, dacă valoarea lui k este mult prea mare, atunci atît vîrful tensiunii cît și amplitudinea precursorului elastic vor scădea drastic. Acesta a fost motivul pentru care la deformații mici a fost aleasă o valoare mică pentru k (vezi 3.1.5)). Un al doilea motiv care a impus valori mici pentru k atunci cînd deformațiile sînt relativ mici, este comportarea în vecinătatea limitei de plasticitate, așa cum este ea descrisă de curbele deformație-timp obținute în secțiunile învecinate cu capătul liber al barei (unde deformațiile sînt relativ mici, depășind doar de cîteva ori deformația la limita de plasticitate). De exemplu în figurile 3.4.4 și 3.4.5 sînt date variațiile în timp ale deformației la opt și respectiv nouă diametri de la capătul lovit. Aceste figuri arată că soluțiile obținute prin calcul sînt în excelentă concordanță cu datele experimentale. Aceasta este în mare parte datorită alegerii corecte a valorii pentru k. Dacă k ar fi fost ales ceva mai mare, maximele ar fi crescut, porțiunea crescătoare a curbelor ar fi sosit prea devreme etc. (vezi Cristescu [1972 b]). În sfîrșit, un al treilea argument în favoarea alegerii unei valori mici pentru k atunci cînd deformațiile sînt mici, a fost variația în timp a deplasării la diferite secțiuni de-a lungul barei. Astfel în figura 3.4.6 sînt reprezentate datele experimentale cît și curbele calculate cu ajutorul exemplului 2. Coincidența datelor este rezo-

Scanned with OKEN Scanner

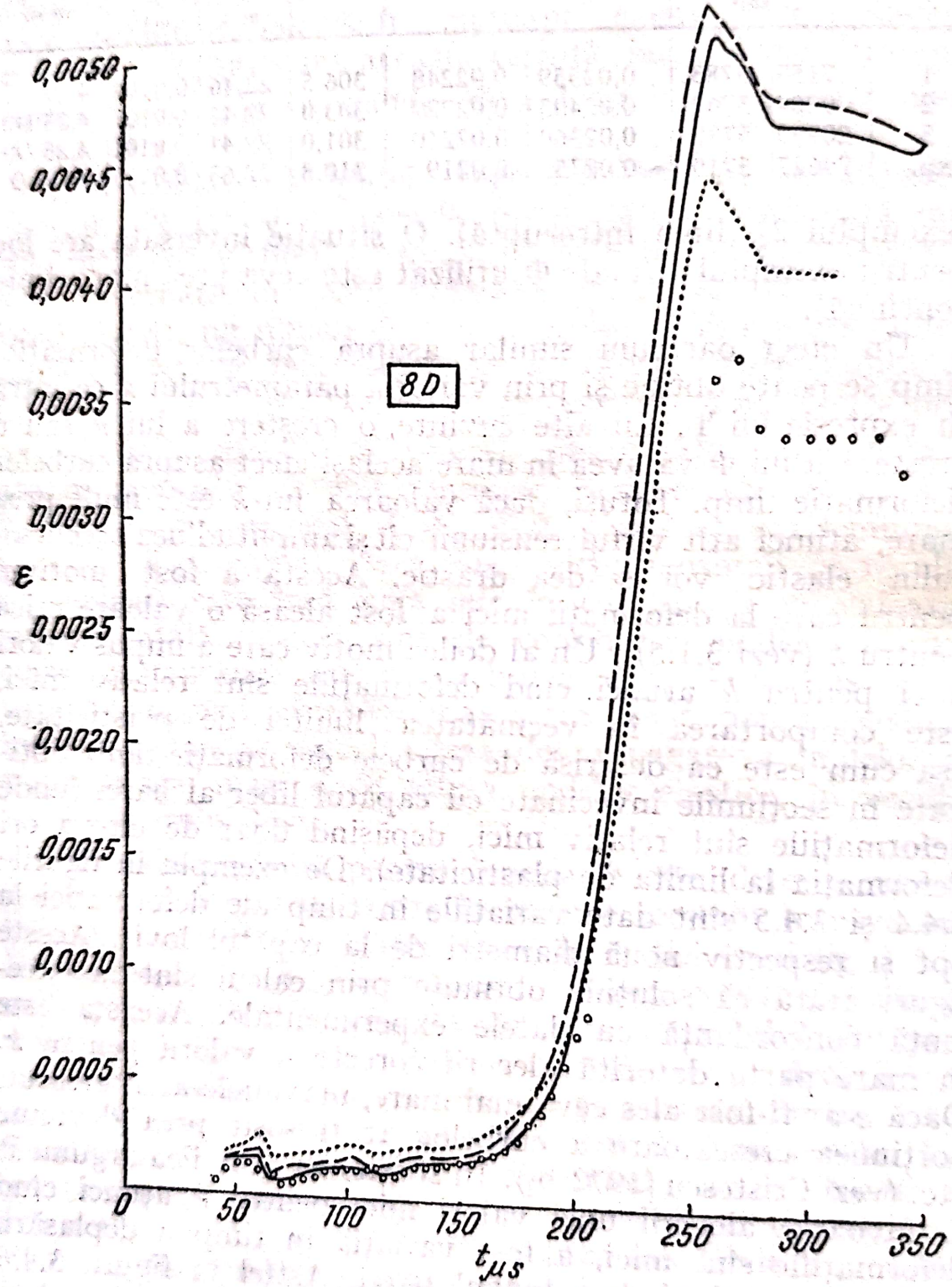

0,0050
0,0045
0,0040
0,0035
0,0030
ε
0,0025
0,0020
0,0015
0,0010
0,0005
8D
0
50
100
150
200
250
300
350
$t_{\mu s}$

Fig. 3.4.4

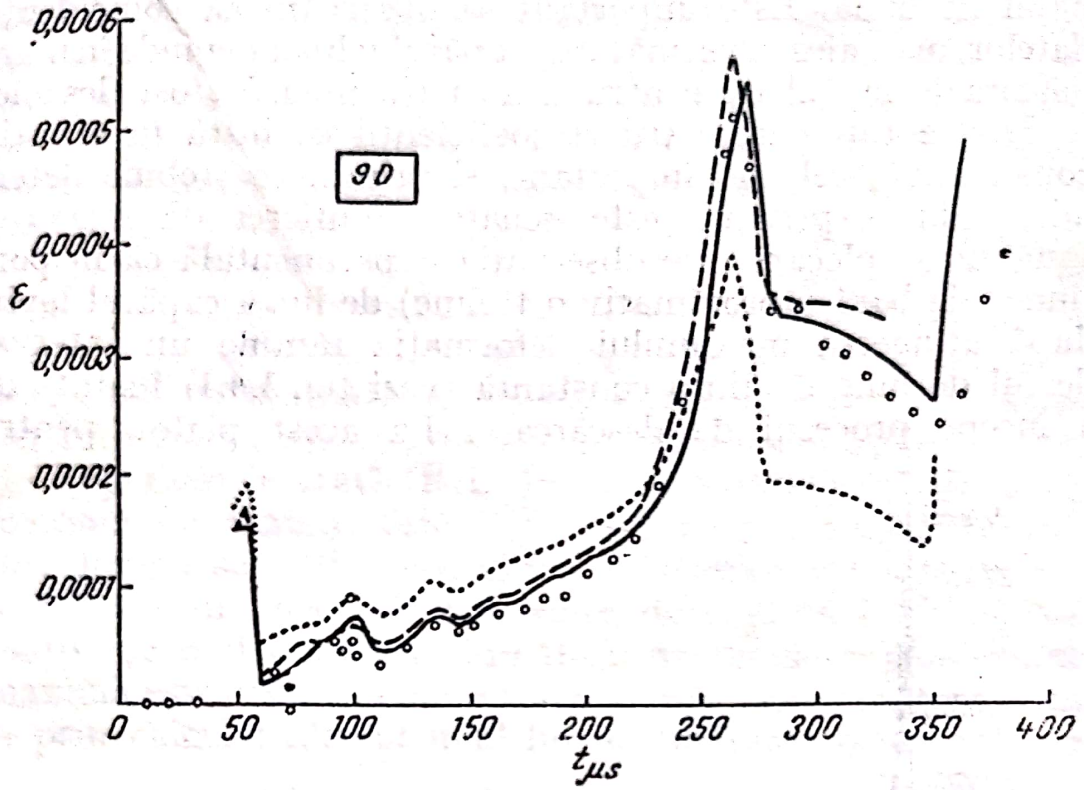


Fig. 3.4.5

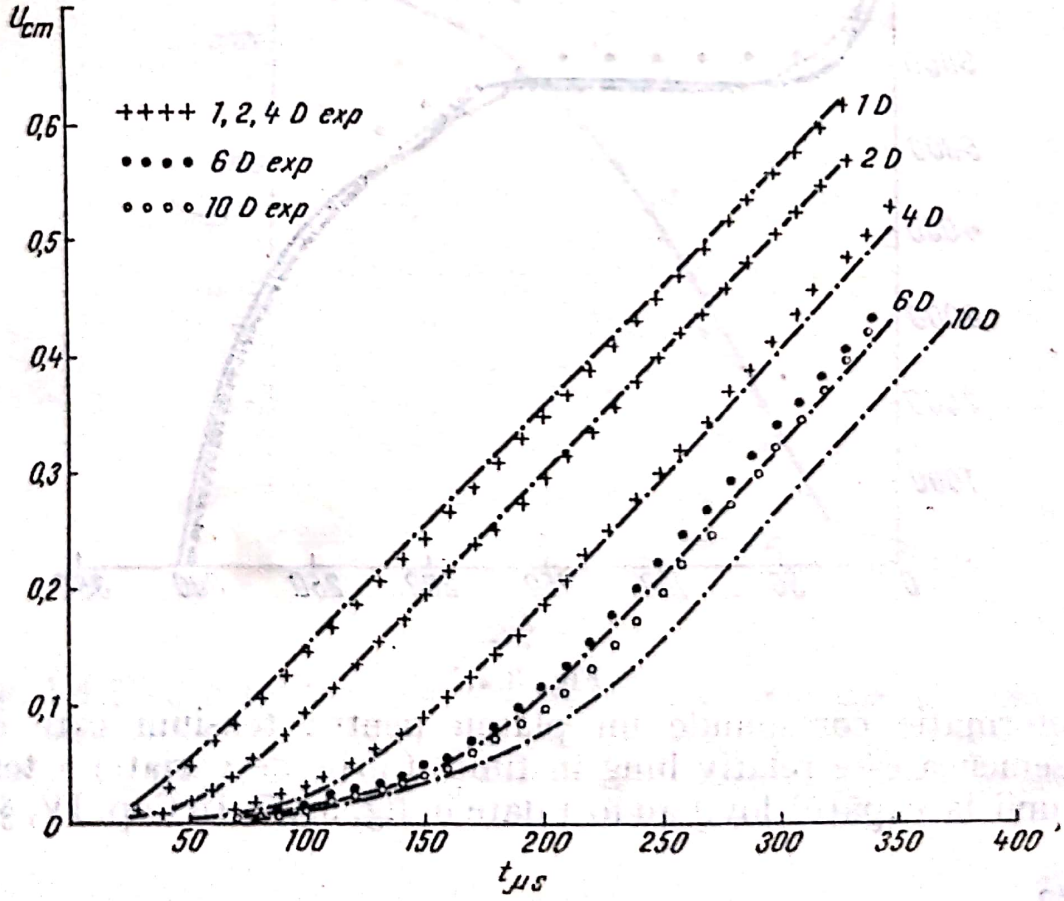


Fig. 3.4.6

nabil de bună. Este important să observăm că coincidența datelor, mai ales în vecinătatea capătului liber depinde în mare măsură de faptul că pentru deformații mici, k a fost ales mic.

Dintre toți parametrii și coeficienții ce intră în ecuația constitutivă, cel mai important, și primul ce trebuie determinat din experiențe este ecuația frontierei de relaxare. Punctul de plecare este observația experimentală că în porțiunea de bară (aproximativ o treime) de lîngă capătul lovit, după atingerea maximului deformația rămîne un interval destul de lung de timp constantă (vezi fig. 3.4.1) înainte de a începe procesul de descărcare. La acest platou pentru

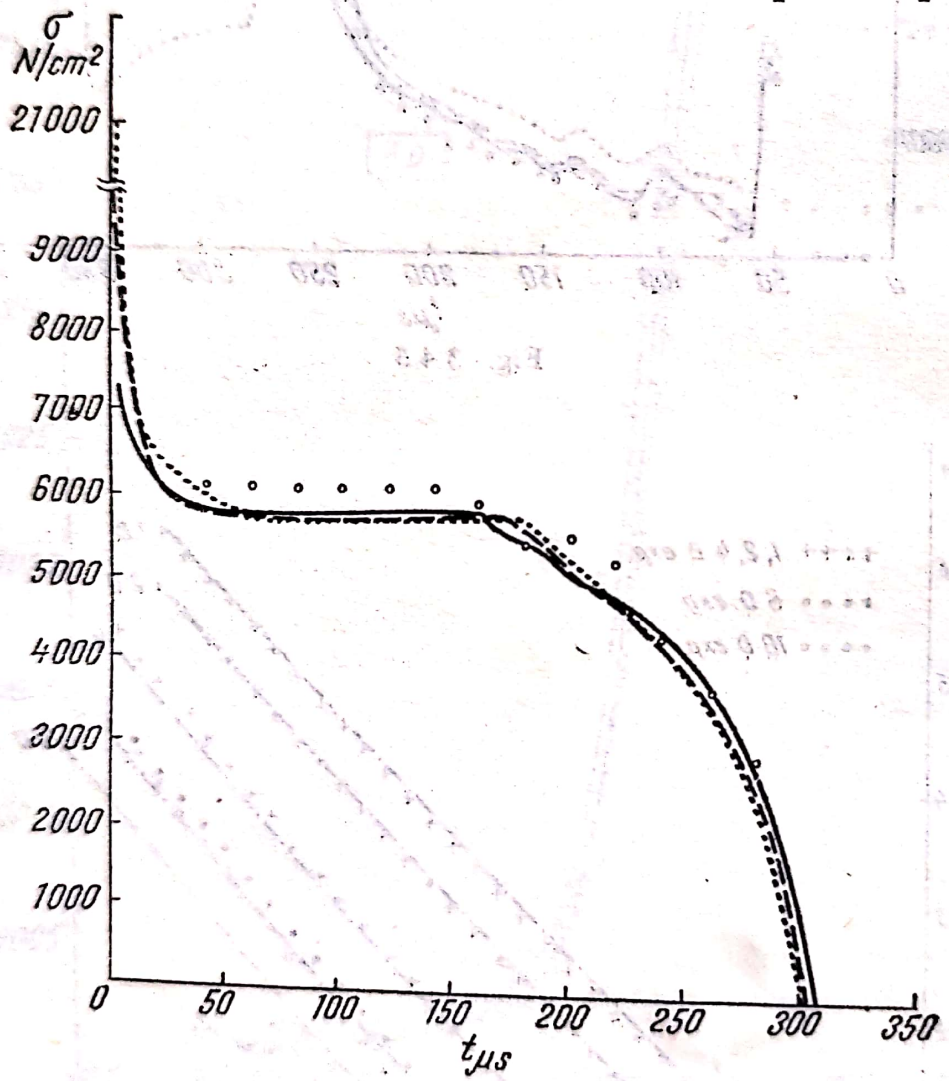


Fig. 3.4.7

deformație corespunde un platou pentru tensiuni care de asemenea este relativ lung în timp. Curbe de variație a tensiunii la capătul lovit au fost date în fig. 3.4.7. În Cap. IV, § 5

este demonstrat că în cazul utilizării ecuației constitutive de forma (3.1.9), pot exista chiar platouri absolute, adică pot exista domenii în planul caracteristic unde toate cele trei funcții σ, ε și v să fie constante. Stările de tensiune și deformație corespunzătoare acestor platouri sînt prin definiție puncte de pe frontiera de relaxare. Astfel dacă se fac mai multe experiențe cu diverse viteze de lovire se pot determina stările de tensiune și deformație corespunzătoare platourilor și prin urmare se poate determina frontiera de relaxare corespunzătoare unui anumit material. Vom observa că în fig. 3.4.7. porțiunile crescătoare ale diverselor curbe ce sînt practic verticale nu au fost reprezentate, pentru a simplifica figura.

Experiențele arată (Bell [1960], Lee [1960]) că deformația maximă (la platou) este constantă pe o anumită porțiune de-a lungul barei (în general pe cîțiva diametri de la capătul lovit) dar în imediata vecinătate de capătul lovit (aproximativ pe o distanță de jumătate de diametru) deformația maximă este ceva mai mare (tabelul 3.2). Acest efect se obține și prin calcul utilizînd modelul de tip rate considerat (vezi

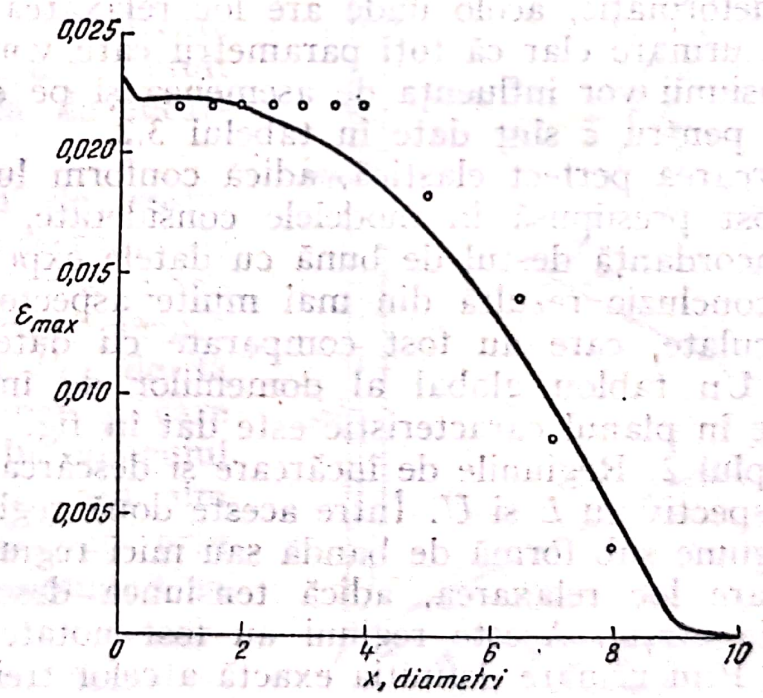


Fig. 3.4.8

fig. 3.4.8 ce corespunde exemplului 2) și este din nou datorit prezenței vîrfului tensiunii în vecinătatea capătului lovit. În fig. 3.4.8 nu au fost reprezentate punctele experi-

mentale care să descrie această deformație crescută lîngă capătul lovit, pentru că datele experimentale nu ne sînt cunoscute. Este cunoscută doar deformația maximă la capătul $X = 0$, dată în tabelul 3.2, care este ceva mai mare decît cea obținută prin calcul.

Un alt parametru determinat experimental relativ precis este $\bar{\varepsilon}$, adică mărimea deformației la punctul de inflexiune pe curbele deformație-timp de pe fig. 3.4.1. Vom nota că un alt punct de inflexiune se poate găsi și la începutul curbelor deformație-tensiune (fig. 3.4.2) dar nu despre el este vorba aici. Găsirea experimentală a lui $\bar{\varepsilon}$ se face măsurînd unghiul α al suprafeței (vezi Cap. II, § 2); maximul lui α va corespunde mărimii $\bar{\varepsilon}$ a deformației. În paragraful următor (vezi și Cristescu [1972 b]) se va vedea că $\bar{\varepsilon}$ este deformația ce corespunde vîrfului tensiunii la capătul barei. Cu alte cuvinte la $X = 0$, partea inferioară a curbelor deformație-timp ($\varepsilon < \bar{\varepsilon}$) corespunde porțiunii urcătoare pe curba tensiune-deformație, iar partea superioară a curbelor deformație-timp ($\varepsilon > \bar{\varepsilon}$) corespunde porțiunii descrescătoare a curbei tensiune-deformație, acolo unde are loc relaxarea tensiunii. Este prin urmare clar că toți parametrii care vor influența vîrful tensiunii vor influența de asemenea și pe $\bar{\varepsilon}$. Valorile numerice pentru $\bar{\varepsilon}$ sînt date în tabelul 3.2.

Descărcarea perfect elastică, adică conform lui (1.1.12), care a fost presupusă în modelele considerate, pare a fi într-o concordanță destul de bună cu datele experimentale. Această concluzie rezultă din mai multe aspecte ale soluțiilor calculate, care au fost comparate cu datele experimentale. Un tablou global al domeniilor de încărcare și descărcare în planul caracteristic este dat în fig. 3.4.9 pentru exemplul 2. Regiunile de încărcare și descărcare au fost notate respectiv cu L și U. Între aceste două regiuni există o altă regiune sub formă de bandă sau mici regiuni izolate, în care are loc relaxarea, adică tensiunea descrește deși deformația crește. Aceste regiuni au fost notate cu R în fig. 3.4.9. Prin urmare definiția exactă a celor trei tipuri de regiuni este următoarea (vezi Cap. I, § 2):

$$\begin{aligned} &\text{în } L: \quad \Phi > 0 \quad \text{și} \quad \Psi > 0 \\ &\text{în } R: \quad \Phi = 0 \quad \text{și} \quad \Psi > 0 \\ &\text{în } U: \quad \Phi = 0 \quad \text{și} \quad \Psi = 0. \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Procesul de descărcare pornește de la capătul liber al barei. Prima penetrare a regiunii de descărcare U în regiunea de încărcare se poate de asemenea observa experimental. Coordonatele x_U ale vîrfului primei regiuni de descărcare sînt date în tabelul 3.2. x_U depinde de mai mulți parametri, dar în mod esențial depinde de σ_Y. În general cu cît este mai mare σ_Y cu atît este mai mic x_U, adică prima regiune de descărcare pătrunde mai mult în regiunea de încărcare.

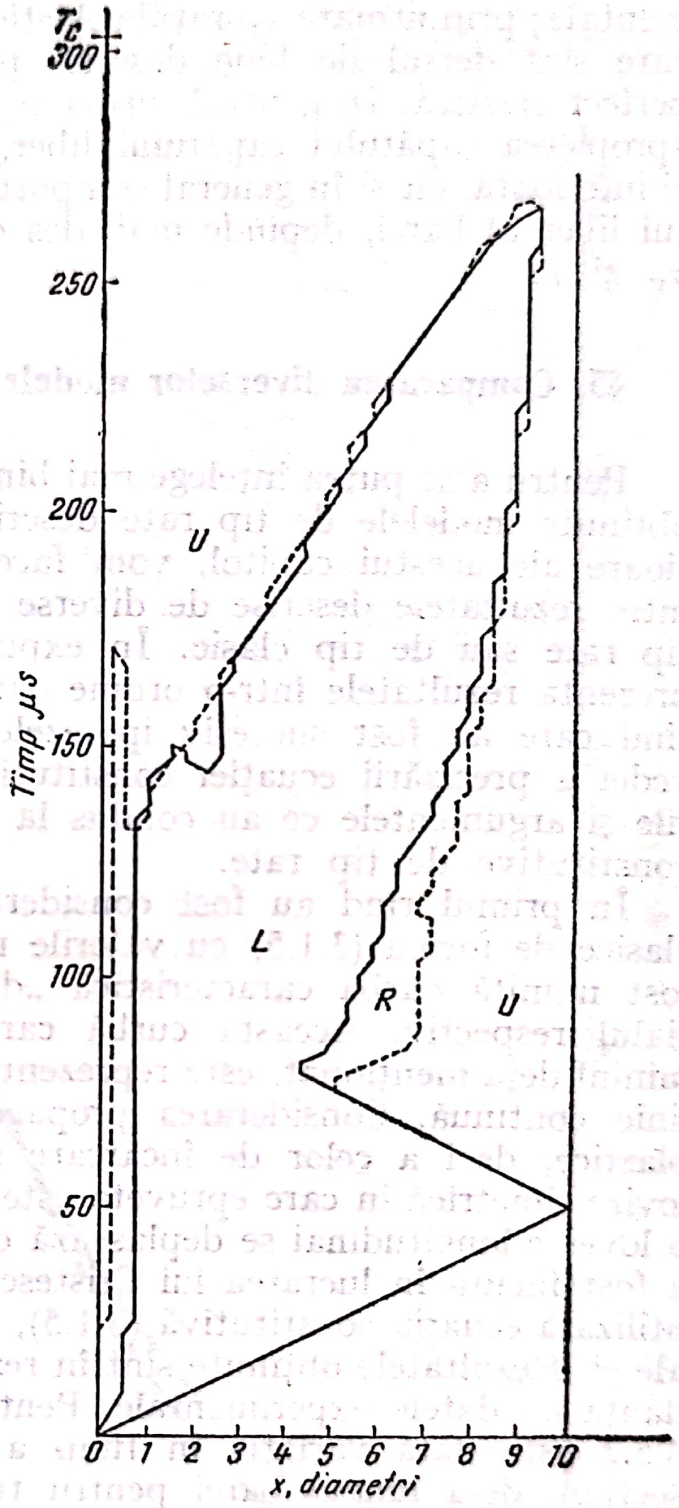


Fig. 3.4.9

Timpul de sosire la diverse secțiuni ale barei, a primei unde de descărcare pornită la timpul l/c_0 de la capătul liber și care pătrunde în domeniul de încărcare, așa cum este el obținut prin calcul presupunînd un model în care descărcarea este perfect elastică, este din nou în bună concordanță cu datele experimentale. De exemplu din fig. 3.4.4 și 3.4.5 rezultă o foarte bună concordanță între răspunsul materialului așa cum rezultă din soluțiile calculate și datele experi-

Scanned with OKEN Scanner

mentale; prin urmare vibrațiile elastice în domeniul de descă- care sînt destul de bine descrise presupunînd descărcarea perfect elastică. În general forma regiunii de descărcare din apropierea capătului capătului liber, în special în regiunea ei inferioară, cît și în general comportarea soluției lîngă capă- tul liber al barei, depinde mai ales de corecta alegere a lui σ_Y și k.

§5. Compararea diverselor modele

Pentru a se putea înțelege mai bine modul în care au fost obținute modelele de tip rate descrise în paragrafele ante- rioare ale acestui capitol, vom face mai jos o comparație între rezultatele descrise de diverse ecuații constitutive, de tip rate sau de tip clasic. În expunerea ce urmează vom prezenta rezultatele într-o ordine oarecum cronologică, ară- tînd care au fost succesiv ipotezele și calculele făcute în vederea precizării ecuației constitutive, care au fost ezită- rile și argumentele ce au condus la forma finală a ecuației constitutive de tip rate.

În primul rînd au fost considerate ecuații constitutive clasice de forma (3.1.5) cu valorile numerice (3.1.7), care a fost numită curba caracteristică „dinamică" pentru mate- rialul respectiv. Această curbă caracteristică pentru alu- miniul deja menționat, este reprezentată în fig. 3.5.1 printr-o linie continuă. Considerarea propagării undelor elastice și plastice, deci a celor de încărcare și de descărcare, într-o lovire simetrică în care epruveta este în repaus iar bara care o lovește longitudinal se deplasează cu viteza $V = 40{,}6$ m/s, a fost făcută în lucrarea lui Cristescu și Bell [1970]. A fost utilizată ecuația constitutivă (3.1.5), (3.1.7) și unele variante ale ei. Rezultatele obținute sînt în rezonabil de bună concor- danță cu datele experimentale. Pentru exemplificare în fig. 3.5.2 este dată variația în timp a deformației la diverse secțiuni de-a lungul barei pentru trei variante de condiții la limită. Este indicat și timpul de contact care este foarte apropiat de cel experimental. Diverse alte aspecte ale solu- ției sînt prezentate în lucrarea lui Cristescu și Bell [1970].

Calculele au fost apoi repetate utilizîndu-se drept ecua- ție constitutivă curba caracteristică cvasistatică (3.1.5) cu

Scanned with OKEN Scanner

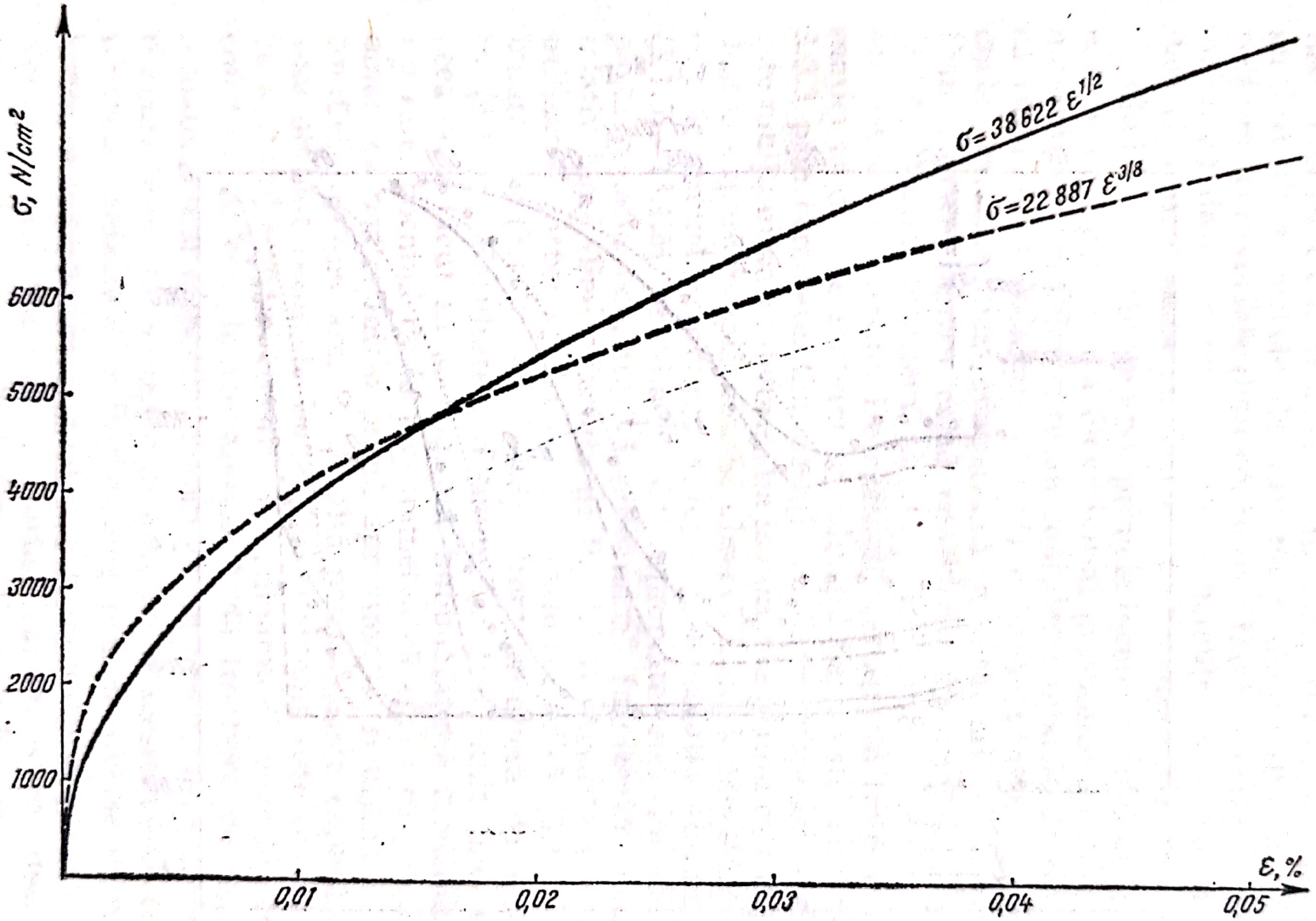


Fig. 3.5.1

Scanned with OKEN Scanner

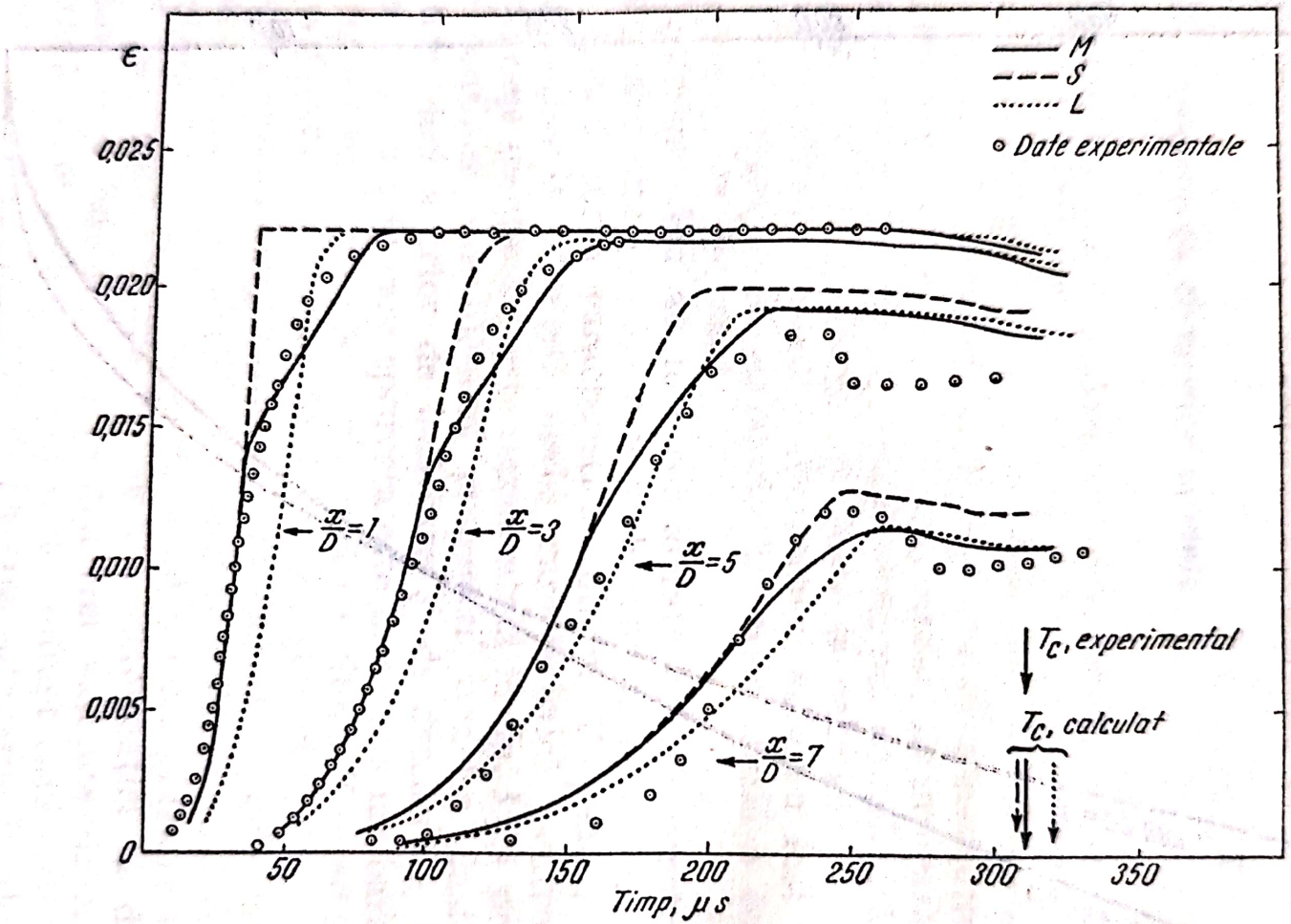


Fig. 3.5.2

Scanned with OKEN Scanner

(3.1.6) a materialului respectiv. Curba a fost reprezentată pe fig. 3.5.1 prin linii punctate. Rezultatele obținute s-au dovedit a fi în proastă concordanță cu datele experimentale. Pentru exemplificare în fig. 3.5.3 (Cristescu [1971 b]) au fost date curbele de variație a deformației la diverse secțiuni transversale (linii continue). Dacă se compară aceste curbe cu datele experimentale (cruciulițe) se constată imediat că concordanța cu datele experimentale nu este bună.

Cînd au fost făcute apoi primele încercări de găsire a unei ecuații de tip rate, s-a făcut inițial presupunerea (făcută de majoritatea autorilor care au considerat modele de tip rate) că frontiera de relaxare (3.1.11) coincide pentru $\varepsilon \geqslant \varepsilon_Y$ cu curba caracteristică cvasistatică a materialului respectiv. Prin urmare, pentru cazul considerat s-a utilizat (3.1.5)—(3.1.6) pentru frontiera $(3.1.11)_2$. Rezultatele obținute nu au fost satisfăcătoare. De exemplu variația în timp a deformației la diverse secțiuni de-a lungul barei este dată în fig. 3.5.3 prin cerculețe. Comparația cu datele experimentale nu este mulțumitoare: deformația maximă la platou este departe de cea experimentală etc. Se observă însă că această soluție este în anumite privințe apropiată de soluția obținută cu (3.1.5)—(3.1.6), maximele sînt apropiate etc. Pe de altă parte ecuația constitutivă „dinamică" furnizează rezultate relativ bune (linii punctate pe fig. 3.5.3). Aceasta a sugerat utilizarea curbei caracteristice dinamice, adică (3.1.5) combinată cu (3.1.7) sau (3.1.8), drept frontieră de relaxare în (3.1.10). Rezultatele obținute au fost mult mai bune, ceea ce a făcut să se continue îmbunătățirea modelului de tip rate, pornind de la presupunerea că curba caracteristică dinamică poate, într-o primă aproximație, fi utilizată drept frontieră de relaxare. Pe de altă parte aceasta explică de ce s-au obținut rezultate bune cînd problema este considerată cu ajutorul ecuației constitutive „dinamice": această ecuație constitutivă este foarte apropiată de frontiera de relaxare a materialului respectiv. De altfel din punct de vedere experimental una din metodele de obținere a acestei curbe caracteristice „dinamice" a fost găsirea pentru diverse viteze de lovire, a deformației la platou și a tensiunii la platou. Deci căutarea experimentală a curbei caracteristice dinamice coincide cu determinarea frontierei de relaxare.

Scanned with OKEN Scanner

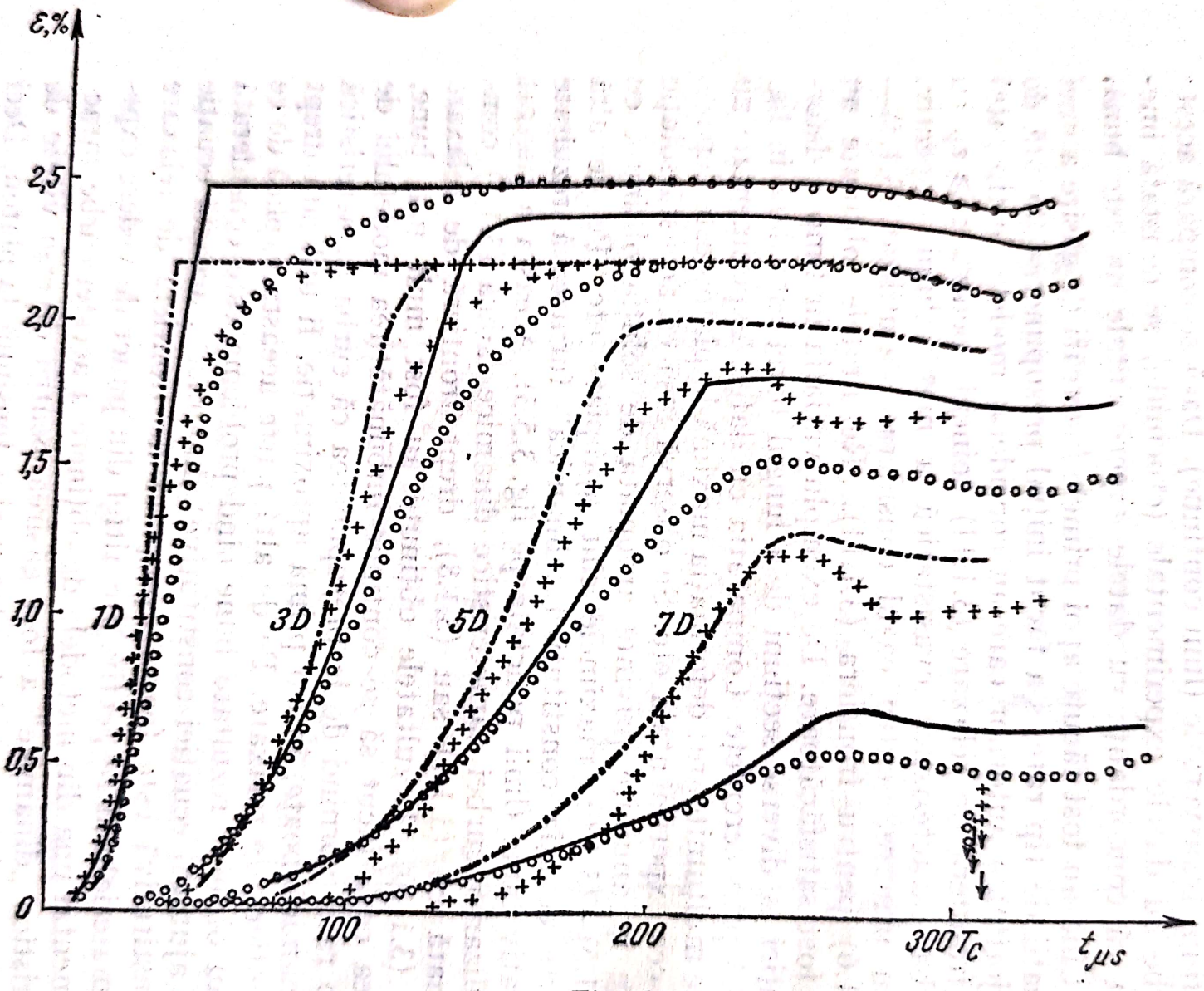


Fig. 3.5.3

Scanned with OKEN Scanner

§ 6. Concluzii

Vom rezuma mai jos procedeul ce se poate utiliza pentru a determina o ecuație constitutivă de tip rate care să poată fi folosită în probleme dinamice.

În primul rînd trebuie găsită frontiera de relaxare. După cum s-a menționat mai sus aceasta este o curbă în planul $\sigma \sim \varepsilon$ care pentru diverse viteze de lovire stabilește o corespondență între mărimea deformației la platou și cea a tensiunii la platoul corespunzător. Se presupune desigur că, pentru un anumit interval de variație a vitezelor de lovire, o asemenea curbă există și este unică. Această curbă a fost numită frontieră de relaxare pentru că în general ea ar putea să nu coincidă cu curba caracteristică cvasistatică. Experimental determinarea frontierei de relaxare se poate obține determinînd tensiunea la platou la capătul lovit sau prin intermediul unei bare mai tari de transmitere (vezi Cap. II, §3) și a deformației (sau a vitezei particulelor) la platoul corespunzător în prima treime de bară. Prin urmare trebuiesc măsurate cantități relativ stabile: o tensiune ce rămîne constantă într-o perioadă relativ lungă de timp și o deformație constantă pe o anumită porțiune a barei. Deci în probleme dinamice frontiera de relaxare joacă un rol fundamental și nu curba caracteristică cvasistatică. În general nu se poate ști a priori dacă ele sînt distincte sau nu.

Nivelul platoului tensiunilor este guvernat de funcția $f(\varepsilon)$ ce intră în expresia lui $\Psi(\sigma, \varepsilon)$. Desigur că și ceilalți parametri influențează într-o măsură mai mică nivelul platoului. De exemplu scăderea lui Φ sau a lui k ridică platoul.

Ordinul de mărime al lui k poate schimba fundamental comportarea soluției. Dacă k este „mare" (pentru exemplele — aluminiul — considerate în Cap. III, $k > 10^7\ s^{-1}$ ar fi deja „mare") atunci curba dinamică tensiune-deformație este la toate secțiunile transversale foarte apropiată de fron-

Scanned with OKEN Scanner

tiera de relaxare și deasupra ei. Din punct de vedere al evitării acumulării erorilor de calcul este util să se utilizeze pentru acest caz o relație tensiune-deformație de forma clasică, ecuația frontierei de relaxare fiind acum utilizată drept curbă caracteristică. Desigur că programul pentru calculator trebuie să fie schimbat în mod corespunzător. Dacă totuși k este foarte mic (pentru exemplele considerate $k < 10^4$ s^{-1} ar fi „mic") atunci curbele dinamice tensiune-deformație mai ales la secțiunile din vecinătatea capătului lovit sînt apropiate de curba de răspuns instantaneu (1.2.5) și se află sub această curbă. Din nou am putea fi tentați să trecem la o ecuație constitutivă de tip clasic (de exemplu o formă integrată a lui (1.2.5) ar putea fi o asemenea ecuație constitutivă). În acest caz totuși se poate utiliza un program de tip „rate" în care curba caracteristică ar fi chiar curba de răspuns instantaneu. Procedeul este atrăgător pentru că un program pentru ecuații constitutive de tip rate este mult mai simplu de scris decît un program pentru ecuații constitutive clasice. Pentru probleme unidimensionale nu are importanță principială dacă în programul făcut aproximăm ecuația constitutivă clasică prin frontiera de relaxare (adică $k \to \infty$) sau dacă o aproximăm prin curba de răspuns instantaneu (adică $k \to 0$). Pentru stări complexe de tensiune lucrurile sînt totuși mai complicate. Dacă condiția de ecruisare utilizată este introdusă în expresia lui Φ atunci diversele tipuri de unde plastice existente vor fi în general cuplate. Dacă însă condiția de ecruisare este introdusă în expresia lui Ψ ele nu vor fi propriu zis cuplate (vezi pentru detalii Cristescu [1971 a]).

Vom mai observa că în apropierea capătului lovit al barei, unde vitezele de deformare sînt mai mari (în timpul încărcării) curbele dinamice tensiune-deformație se ridică mai sus iar intervalul de timp în care are loc relaxarea este în general mai scurt. În secțiunile mai apropiate de capătul liber situația este inversată: curbele dinamice sînt apropiate de frontiera de relaxare iar relaxarea are loc într-un interval

Scanned with OKEN Scanner

mai lung de timp. Aceasta face ca încercarea făcută uneori de unii autori de a utiliza o singură „curbă dinamică" pentru întreaga bară, să fie îndoielnică. Reamintim că dacă vitezele de deformare sînt relativ mici, atunci curbele dinamice sînt apropiate de frontiera de relaxare și nu de curba caracteristică cvasistatică.

Să facem unele observații referitoare la coeficientul Φ. Acest coeficient intervine în viteza de propagare, deci în „timpul de sosire" a porțiunii urcătoare a curbei $\varepsilon - t$ în timpul încărcării. Prin urmare s-ar putea crede că Φ poate fi determinat prin măsurarea timpului de sosire a diverselor niveluri ale deformației la diverse secțiuni în domeniul de încărcare. Acest procedeu nu va furniza totuși o expresie bine determinată pentru Φ în cadrul teoriei ecuației constitutive de tip rate, căci timpul de sosire la diverse secțiuni a nivelurilor deformației nu corespunde timpului de sosire a unor unde bine determinate. În același timp însă, prin curba de răspuns instantaneu, Φ poate fi determinat printr-o măsurare a tensiunii. Să mai observăm și următoarele. Dacă examinăm curba $\varepsilon - t$ pentru $X = 0$, observăm că în partea ei superioară, acolo unde $\partial^2\varepsilon/\partial t^2 < 0$ avem $\Phi = 0$, adică această porțiune corespunde porțiunii descrescătoare a curbei dinamice $\sigma - \varepsilon$, acolo unde are loc relaxarea și fluajul dinamic. De exemplu în fig. 3.6.1 sînt date mai multe curbe $\varepsilon - t$ la $X = 0$. Punctul P, unde $\partial^2\varepsilon/\partial t^2 = 0$ adică curba $\varepsilon - t$ își schimbă curbura, corespunde vîrfului tensiunii pe diagrama $\sigma - t$. Fig. 3.6.1,a a fost obținută cu un model cvasiliniar (vezi Cristescu [1972 b]), fig. 3.6.1,b corespunde unui model semiliniar (adică $\Phi = 0$) iar fig. 3.6.1,c corespunde unui model cvasiliniar cu o valoare foarte mică pentru $k (k = 10^4\ s^{-1})$. În acest ultim caz, practic nu există o porțiune pe care $\partial^2\varepsilon/\partial t^2 < 0$, iar curba $\varepsilon - t$ are același aspect ca cele obținute cu ecuații constitutive clasice (nu există o schimbare a curburii în perioada de încărcare). Reamintim că schimbarea curburii curbelor $\varepsilon - t$, a motivului acestei schimbări, a făcut obiectul multor dezbateri în literatura de specialitate.

Scanned with OKEN Scanner

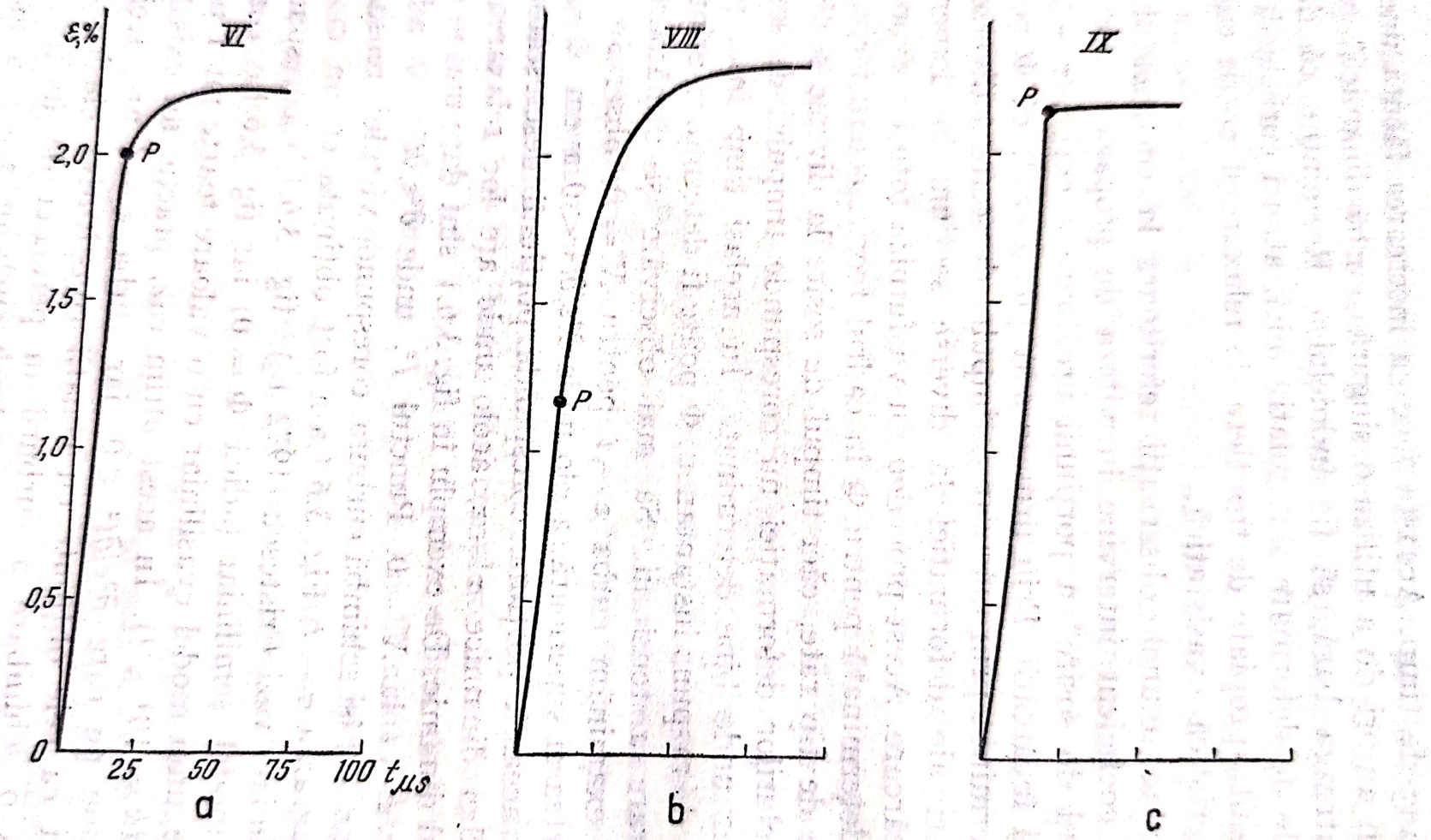


Fig. 3.6.1

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie cu ajutorul unor ecuații constitutive de tip rate se pot descrie unele efecte experimentale ce nu pot fi descrise cu ajutorul ecuațiilor constitutive clasice. Principalele efecte sînt următoarele: prezența unui vîrf al tensiunilor ce descrește într-un număr redus de microsecunde către un platou, schimbarea curburii pe curbele deformație-timp, existența unui „precursor elastic" a cărui amplitudine descrește în timpul propagării, faptul că în imediata apropiere a capătului lovit deformația maximă este mai mare decît cea corespunzătoare platoului etc.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

Ecuații constitutive de tip „rate" pentru problema unidimensională

§1. Condiții impuse asupra ecuației constitutive de tip rate de experiențele dinamice de reîncărcare

În acest paragraf se va arăta cum concluziile experiențelor de reîncărcare (vezi Cap. II, § 3) pot fi folosite ca ipoteze matematice în vederea obținerii de restricții asupra funcțiilor ce intervin în ecuațiile constitutive de tip rate. Rezultatele prezentate aici sînt datorate lui Suliciu [1974 a], Suliciu, Malvern și Cristescu [1974].

Vom considera mișcări unidimensionale $x = \chi(X, t)$ ale unui corp $\mathcal{B}$, cu $X \in I_1 \subset R$ și $t \in I_2 \subseteq R \cdot I_1 = (a_1, b_1)$ se numește configurație de referință a corpului $\mathcal{B}$ [X se numește coordonata punctului material în configurația de referință (sau coordonata lagrangeană) iar x este coordonata actuală a punctului material (sau coordonata euleriană)]. $I_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ și $\beta_2 - \alpha_2$ se numește durata mișcării și ea poate fi finită sau nu.

Presupunem că mișcarea χ este continuă pe $D = I_1 \times I_2$ și că următoarele funcții

$$V(X, t) = \chi_t(X, t) = \dot{x}$$
$$\varepsilon(X, t) = \chi_X(X, t) - 1 > -1 \qquad (4.1.1)$$

există și sînt continue pe porțiuni și diferențiabile pe porțiuni pe D. $V(X, t)$ se numește viteza punctului material

iar $\varepsilon(X, t)$ deformația punctului. Tensiunea $\sigma = \sigma(X, t)$ este definită ca forța pe unitatea de arie în configurația de referință, pozitivă la întindere, și este continuă pe porțiuni și diferențiabilă pe porțiuni pe D.

Noi putem avea $\varepsilon \in (-1, \infty)$ și $\sigma \in (-\infty, \infty)$.

Numim proces mecanic al unei particule de coordonată X a corpului $\mathcal{B}$ o curbă $(\varepsilon(t), \sigma(t)) \in (-1, \infty) \times (-\infty, \infty)$ pentru t într-un subinterval al lui I_2; ε și σ fiind funcții continue pe porțiuni și funcții diferențiabile pe porțiuni.

Presupunerea constitutivă I (P.C.I.): Considerăm un domeniu $\mathcal{D} \subseteq (-1, \infty) \times (-\infty, \infty)$ conținînd originea $(0, 0)$; spunem că $\mathcal{B}$ are o comportare de tip rate în domeniul $\mathcal{D}$ dacă există două funcții $\varphi, \psi: \mathcal{D} \to R$, $\varphi > 0$ astfel încît

$$\dot{\sigma} = \varphi(\varepsilon, \sigma)\,\dot{\varepsilon} + \psi(\varepsilon, \sigma) \tag{4.1.2}$$

pentru orice proces mecanic $(\varepsilon(t), \sigma(t)) \in \mathcal{D}$. Presupunem că $\varphi \in C^s(\mathcal{D})$ și $\psi \in C^r(\mathcal{D})$, cu $s, r \geqslant 0$.

O curbă continuă pe porțiuni și diferențiabilă pe porțiuni $(\varepsilon(t), \sigma(t)) \in \mathcal{D}$ pentru toți $t \in I = (\alpha, \beta) \subseteq I_2$ va fi numită proces mecanic de tip rate de durată $\beta - \alpha$, dacă ecuația (4.1.2) este verificată în lungul acestei curbe.

Vom spune că un material de tip rate posedă o configurație naturală de repaus, dacă $\varepsilon(t) = 0$ pentru toți $t \in [\alpha, \beta]$ și $\sigma(\alpha) = 0$ implică $\sigma(t) = 0$ pentru toți $t \in [\alpha, \beta]$, pentru orice $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in R$.

O condiție necesară ca un material cu comportare de tip rate să posede o configurație naturală de repaus este ca

$$\psi(0, 0) = 0. \tag{4.1.3}$$

Pentru un corp $\mathcal{B}$ care posedă o configurație naturală de repaus, vom considera toate deformațiile de forma

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ \varepsilon_* = \text{const.} & \text{pentru } t \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.1.4}$$

astfel ca procesul de tip rate $(\varepsilon(t), \sigma(t))$ să aparțină lui $\mathcal{D}$ pentru toți $t \geqslant 0$, unde

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ \tilde{\sigma}(t) & \text{pentru } t \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

și $\tilde{\sigma}$, pentru $t \geqslant 0$, este o funcție netedă determinată cum urmează

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \psi(\varepsilon_*, \tilde{\sigma}), \quad \tilde{\sigma}(0) = \sigma_I(\varepsilon_*) \tag{4.1.6}$$

$$\frac{d\sigma_I(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \varphi(\varepsilon, \sigma_I(\varepsilon)), \quad \sigma_I(0) = 0.$$

O curbă $(\varepsilon, \sigma_I(\varepsilon)) \in \mathcal{D}$, unde σ_I este soluție a problemei inițiale (4.1.6)$_2$, va fi numită curbă de răspuns instantaneu în raport cu configurația naturală de repaus.

Vom nota cu $\mathcal{P}_0$ mulțimea tuturor deformațiilor de forma (4.1.4) pentru care există $\sigma(t)$ de forma (4.1.5) determinat de (4.1.6) astfel încît $(\varepsilon(t), \sigma(t)) \in \mathcal{D}$ pentru toți $t \geqslant 0$.

Un arc de curbă $(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon)) \in \mathcal{D}$ se numește curbă de relaxare dacă în lungul acestei curbe avem

$$\psi(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon)) = 0. \tag{4.1.7}$$

Presupunerea constitutivă II (P.C.II): Orice $\varepsilon \in \mathcal{D} \cap R$ este în $\mathcal{P}_0$ și pentru orice astfel de ε există un timp finit $t_\varepsilon > 0$ și o funcție $\varphi_0 : (-1, \infty) \cap \mathcal{D} \to (0, \infty)$ de clasă C^k, $k = 0, 1, \ldots$ astfel încît

$$\varphi(\varepsilon_*, \sigma(t)) = \varphi_0(\varepsilon_*) \quad \text{pentru } t \geqslant t_\varepsilon > 0. \tag{4.1.8}$$

Notăm că funcția φ_0 a fost aleasă de Suliciu, Malvern și Cristescu [1974] ca fiind constantă, adică $\varphi_0(\varepsilon) = \varphi(0, 0) = E$, E fiind modulul lui Young.

Teorema care urmează (vezi Suliciu [1974 a]) arată restricțiile impuse asupra ecuației constitutive (4.1.2) de către ipoteza constitutivă de mai sus.

Teorema 4.1.1. Presupunem că i) P.C.I. și P.C.II sînt adevărate respectiv pentru $s = 0$, $r = 0$ și $k = 0$ și că ii) pentru orice ε, $y = \varphi(\varepsilon, \sigma)$ este inversabilă în raport cu σ, pe $\mathcal{D}$, iii) $\mathcal{D}$ are proprietatea că dacă $(\varepsilon, \sigma_1), (\varepsilon, \sigma_2) \in \mathcal{D}$ atunci $(\varepsilon, \lambda\sigma_1 + (1 - \lambda)\sigma_2) \in \mathcal{D}$ pentru orice $\lambda \in [0, 1]$. Atunci a) există o curbă de relaxare unică (cel puțin local), b) în lungul acestei curbe viteza de propagare este dată de $c_0 = (\varphi_0(\varepsilon)/\rho_0)^{1/2}$ (ρ_0 este densitatea de masă în configurația de referință), c) pentru $\varepsilon < 0$, $\sigma_I(\varepsilon) < \sigma_R(\varepsilon)$ dacă și numai dacă $\psi(\varepsilon, \sigma_I(\varepsilon)) \geqslant 0$ și prin urmare $\psi(\sigma, \varepsilon) > 0$ pentru $\sigma \in I_1^+ = (\sigma_I(\varepsilon), \sigma_R(\varepsilon))$ [sau $\sigma_R(\varepsilon) < \sigma_I(\varepsilon)$ dacă și numai

Scanned with OKEN Scanner

dacă $\psi(\varepsilon, \sigma_I(\varepsilon)) < 0$ și prin urmare $\psi(\varepsilon, \sigma) < 0$ pentru $\sigma \in I_1^- = (\sigma_R(\varepsilon), \sigma_I(\varepsilon))]$; pentru $\varepsilon > 0$, $\sigma_I(\varepsilon) > \sigma_R(\varepsilon)$ dacă și numai dacă $\psi(\varepsilon, \sigma_I(\varepsilon)) < 0$ și prin urmare $\psi(\varepsilon, \sigma) < 0$ pentru $\sigma = I_2^+ = (\sigma_R(\varepsilon), \sigma_I(\varepsilon))$ [sau $\sigma_I(\varepsilon) < \sigma_R(\varepsilon)$ dacă și numai dacă $\psi(\varepsilon, \sigma_I(\varepsilon)) > 0$ și prin urmare $\psi(\varepsilon, \sigma) > 0$ pentru $\sigma \in I_2^- = (\sigma_I(\varepsilon), \sigma_R(\varepsilon))]$, d) $1/\psi(\varepsilon, \sigma)$ este integrabilă Lebesque în raport cu σ pe intervalele corespunzătoare I_1^+, I_1^-, I_2^+, I_2^- [și ca o consecință a lui d), e) $\psi(\varepsilon, \sigma)$ nu poate fi local Lipschitziană în raport cu σ pe întreg domeniul $\mathcal{D}$].

Demonstrație: a) Luăm $\varepsilon \in \mathcal{P}_0$; atunci din P.C.II.

$$\varphi(\varepsilon_*, \sigma(t)) = \varphi_0(\varepsilon_*) \text{ pentru } t \geqslant t_\varepsilon$$

Din ii) urmează că $\sigma(t) = \sigma_* = \text{constant}$, pentru $t \geqslant t_\varepsilon$ și

$$\sigma_* = \sigma_R(\varepsilon_*). \tag{4.1.9}$$

Din i) și ii) ajungem la concluzia că σ_R este continuu. Acum din (4.1.2) și (4.1.9) obținem

$$\psi(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon)) = \dot{\sigma} = 0 \quad \text{pentru } t \geqslant t_\varepsilon \tag{4.1.10}$$

adică curba $(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon))$ este o curbă de relaxare continuă unică (cel puțin local). Unicitatea urmează din ii).

b) Viteza de propagare c pentru mișcarea unidimensională a unui material de tip rate este dată de

$$c = \left(\frac{\varphi(\varepsilon, \sigma)}{\rho_0}\right)^{1/2}$$

(vezi Cap. I, § 2). Conform cu P.C.II și formula de mai sus, obținem

$$c_0 = c(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon)) = (\varphi_0(\varepsilon)/\rho_0)^{1/2}.$$

c) și d). Presupunem că

$$\psi(\varepsilon_*, \sigma_I(\varepsilon_*)) = 0 \quad \text{pentru un } \varepsilon_* \neq 0;$$

atunci

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma_I(\varepsilon_*) \quad \text{pentru } t \geqslant 0$$

este o soluție a lui (4.1.6). Astfel $\varepsilon \in \mathcal{P}_0$, ceea ce contrazice P.C.II deoarece t_ε trebuie să fie mai mare decît zero. Prin urmare $\psi(\varepsilon_*, \sigma_I(\varepsilon_*)) \neq 0$ pentru orice $\varepsilon_* \neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Luăm acum $\varepsilon_* < 0$ și presupunem că $\sigma_I(\varepsilon_*) < \sigma_R(\varepsilon_*)$; atunci există un $\overline{\sigma} \in I_1^+$ astfel încît $\psi(\varepsilon_*, \sigma) > 0$ pentru $\sigma \in [\sigma_I(\varepsilon_*), \overline{\sigma}]$ și $\psi(\varepsilon_*, \overline{\sigma}) = 0$, deoarece $\psi(\varepsilon_*, \sigma) < 0$ implică $\dot{\sigma}(t) < 0$, care dă $\sigma(t) < \sigma(0) = \sigma_I(\varepsilon_*)$ pentru $t > 0$. Acum, pentru orice $\sigma_1 \in (\sigma_I(\varepsilon_*), \overline{\sigma})$ avem

$$\int_{\sigma_I(\varepsilon_*)}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\psi(\varepsilon_*, \sigma)} = t_1 < t_\varepsilon < \infty.$$

Prin urmare, cînd $\sigma_1 \to \overline{\sigma}$, $t_1 \to \bar{t} \leqslant t_\varepsilon$. Aplicînd ii) și iii) procesului $(\varepsilon(t), \sigma(t)) \in \mathcal{D}$ cu

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ \tilde{\sigma}(t_1) & \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant \bar{t}, \\ \sigma & \text{pentru } t \geqslant \bar{t} \end{cases} \qquad \varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ \varepsilon_* & \text{pentru } t \geqslant 0 \end{cases}$$

unde $\dot{\tilde{\sigma}}(t) = \psi(\varepsilon_*, \tilde{\sigma}(t))$, $\tilde{\sigma}(0) = \sigma_I(\varepsilon_*)$; atunci se poate conclude că $\tilde{\sigma} = \sigma_R(\varepsilon_*)$ și $\bar{t} = t_\varepsilon$.

Invers, presupunem că $0 < \psi(\varepsilon, \sigma_I(\varepsilon_*))$; atunci $\psi(\varepsilon_*, \sigma) > 0$ pentru toți $\sigma \in [\sigma_I(\varepsilon_*), \overline{\sigma}]$, $\overline{\sigma} > \sigma_I(\varepsilon_*)$ și ca mai sus, noi concludem că $\overline{\sigma} = \sigma_R(\varepsilon_*)$.

Pentru celelalte cazuri, demonstrația poate fi dată în același mod.

e) Presupunem că ψ este local Lipschitziană în raport cu σ pe $\mathcal{D}$. Atunci pentru orice punct $(\varepsilon_0, \sigma_0) \in \mathcal{D}$, $\sigma_0 = \sigma_R(\varepsilon_0)$ există o constantă $M = M(\varepsilon_0, \sigma_0) > 0$ astfel încît

$$|\psi(\varepsilon, \tau)| \leqslant M |\tau - \sigma_0|$$

pentru toate punctele (ε_0, τ) într-o vecinătate a lui $(\varepsilon_0, \sigma_0)$. Urmează, pentru un $\tau_1 < \sigma_0$

$$\int_{\tau_1}^{\sigma_0} (1/|\psi(\varepsilon_0, \tau)|)\, d\tau \geqslant -\frac{1}{M} \log |\tau - \sigma_0| \Big|_{\tau_1}^{\sigma_0} = \infty$$

adică t_ε nu poate fi finit.

Observația 4.1.1. Dacă $\sigma_I(\varepsilon) < \sigma_R(\varepsilon)$ și $\psi(\varepsilon, \sigma) \leqslant 0$ pentru $\sigma \geqslant \sigma_R(\varepsilon)$ (pentru $\varepsilon < 0$ și $\sigma < 0$) atunci soluția $\sigma(t) = \sigma_R(\varepsilon)$ pentru $t \geqslant t_\varepsilon$ a ecuației $\dot{\sigma} = \psi(\varepsilon, \sigma)$ ($\varepsilon = \text{const.}$ pentru $t \geqslant t_\varepsilon$), $\sigma(t_\varepsilon) = \sigma_R(\varepsilon)$ este unică (vezi Hartman [1964] p. 33).

Scanned with OKEN Scanner

Observația 4.1.2. Dacă în teorema precedentă facem presupunerea suplimentară că P.C.II este adevărată pentru $r = 1$, $\psi \in C^1(\mathcal{D})$ și $\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\varepsilon, \sigma) \neq 0$ pentru toți $(\varepsilon, \sigma) \in \mathcal{D}$ atunci σ_R este o funcție netedă (vezi Suliciu, Malvern și Cristescu [1974], și avem

$$\frac{d\sigma_R}{d\varepsilon} = \frac{\frac{d\varphi_0(\varepsilon)}{d\varepsilon} - \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon))}{\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon))}. \tag{4.1.11}$$

Exemple de funcții ψ definite pentru $\varepsilon \leqslant 0$ și $\sigma \leqslant 0$ care dau timpi finiți de relaxare

$$\psi(\varepsilon, \sigma) = \begin{cases} 0 & \sigma \geqslant \sigma_R(\varepsilon) \\ k(\sigma_R(\varepsilon) - \sigma)^\alpha & \sigma < \sigma_R(\varepsilon), \quad \alpha \in (0, 1) \end{cases} \tag{4.1.12}$$

și

$$\psi(\varepsilon, \sigma) = \begin{cases} 0 & \sigma \geqslant \sigma_R(\varepsilon) \\ -\frac{k_1}{\log(\sigma_R(\varepsilon) - \sigma) - \log(k_2 - \sigma)}, & \sigma < \sigma_R(\varepsilon) \end{cases} \tag{4.1.13}$$

unde $\sigma = \sigma_R(\varepsilon)$ este netedă și crescătoare, k, k_1, și k_2 sînt constante pozitive.

Exemple de primul tip au fost considerate de Kukudjanov [1967] în legătură cu unele cercetări numerice asupra influenței vitezei de deformare.

Din această analiză noi putem conclude că ecuațiile constitutive de tip rate, care conduc la timp de relaxare finit, nu pot fi linearizate prin dezvoltare în serie, în vecinătatea unei stări relaxate $(\varepsilon_0, \sigma_R(\varepsilon_0))$, chiar dacă deformația ε este foarte apropiată de ε_0.

§2. Mișcări staționare ale materialelor cu comportare de tip rate

În acest paragraf vom expune rezultatele obținute de Greenberg [1968] pentru materiale de tip rate care au comportare vîsco-elastică, și modificate de Suliciu [1974 b]

Scanned with OKEN Scanner

pentru ca să poată fi aplicate și unor materiale elasto-vîsco-plastice și să fie compatibile cu ipoteza constitutivă II din § 1 (vezi Suliciu [1974 a]).

Vom presupune că corpul $\mathcal{B}$ are configurația de referință $I_1 = R$ (vezi § 1) și $I_2 = R$ și că mișcarea χ și tensiunea σ satisfac aceleași ipoteze ca în § 1 pe $\mathcal{D} = R \times R$.

Se spune că o mișcare χ este staționară dacă există funcțiile $\hat{\varepsilon}$ și $\hat{V}$ continue pe porțiuni, astfel încît

$$\chi_X(X, t) = \hat{\varepsilon}(x) + 1 > -1, \quad \chi_t(X, t) = \hat{V}(x). \tag{4.2.1}$$

Greenberg [1968] a arătat că χ este staționară dacă și numai dacă există un număr pozitiv V_0 și o funcție continuă f avînd derivata continuă pe porțiuni $f' > 0$ astfel încît

$$\chi(X, t) = f(\xi), \quad \xi = X/V_0 + t \tag{4.2.2}$$

pentru orice $(X, t) \in R \times R$. Pentru mișcări staționare astfel ca $\lim_{\xi \to -\infty} f'(\xi) = V_0$, parametrul V_0 poate fi interpretat ca viteza în amonte în punctul spațial $x = -\infty$.

Vom spune că cîmpul de tensiuni este staționar dacă există o funcție $\hat{\sigma}$ astfel încît

$$\sigma(X, t) = \hat{\sigma}(x). \tag{4.2.3}$$

Dacă presupunem că densitatea în configurația de referință ρ_0 este constantă, atunci în absența forțelor masice tensiunea σ și mișcarea χ sînt legate prin ecuația de conservare a impulsului

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{X_1}^{X_2} \rho_0 \chi_t(X, t)\, \mathrm{d}X = \sigma(X_2, t) - \sigma(X_1, t) \tag{4.2.4}$$

pentru toți X_1, X_2 și t. Dacă ținem seama că $\partial/\partial X = (1/V_0)\,(\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi)$ și $\partial/\partial t = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ atunci (4.2.4) se reduce la

$$\sigma(\xi_2) - \sigma(\xi_1) = \nu(\varepsilon(\xi_2) - \varepsilon(\xi_1)) \tag{4.2.5}$$

pentru toți $\xi_1, \xi_2 \in R$, unde

$$\nu = \rho_0 V_0^2. \tag{4.2.6}$$

Notăm că dacă $\lim_{\xi \to -\infty} f'(\xi) = V_0$, atunci $\lim_{\xi \to -\infty} \varepsilon(\xi) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru mișcări și tensiuni staționare ecuația constitutivă (4.1.2) devine

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \varphi(\varepsilon, \sigma)\frac{d\varepsilon}{d\xi} + \psi(\varepsilon, \sigma). \tag{4.2.7}$$

Înainte de a discuta soluțiile sistemului de ecuații (4.2.5) și (4.2.7) vom face următoarele presupuneri (vezi Suliciu [1974 b]).

Presupunerea constitutivă III (P.C.III)

a) În domeniul $\mathcal{D} = \{(\varepsilon, \sigma), -1 < \varepsilon \leqslant 0, -\infty < \sigma \leqslant 0\}$ există o curbă $\boldsymbol{R} = (\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon))$, $\varepsilon \in (-1, 0)$ de clasă C^2 cu următoarele proprietăți (fig. 4.2.1)

$$0 < \sigma_R'(\varepsilon) < \varphi_0(\varepsilon), \quad \sigma_R(0) = 0 \tag{4.2.8 a}$$

$$\sigma_R''(\varepsilon) < 0 \tag{4.2.8. b}$$

$$\varphi(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon)) = \varphi_0(\varepsilon) \tag{4.2.8 c}$$

$$\lim_{\varepsilon \to -1} \sigma_R(\varepsilon) = -\infty. \tag{4.2.8 d}$$

b) P.C.I și P.C.II sînt adevărate respectiv pentru $s = 1$ și $k = 1$ și că pe $\mathcal{D}$ avem în plus

$$\varphi(\varepsilon, \sigma) > 0, \quad (\varepsilon, \sigma) \in \mathcal{D} \tag{4.2.9a}$$

$$\varphi_\varepsilon + \varphi\varphi_\sigma < 0, \quad \sigma < \sigma_R(\varepsilon) \tag{4.2.9b}$$

$$\varphi_\sigma < 0, \quad \sigma < \sigma_R(\varepsilon) \tag{4.2.9c}$$

$$\varphi(\varepsilon, \sigma) = \varphi_0(\varepsilon), \ \sigma \geqslant \sigma_R(\varepsilon) \tag{4.2.9d}$$

$$\varphi_0'(\varepsilon) \leqslant 0, \quad -1 < \varepsilon \leqslant 0. \tag{4.2.9e}$$

c) Funcția $\psi \in C^0(\mathcal{D})$ are următoarele proprietăți

$$\psi \text{ este de clasă } C^1 \text{ pe } \mathcal{D} - \boldsymbol{R} \tag{4.2.10a}$$

$$\psi_\varepsilon \geqslant 0, \quad \psi_\sigma \leqslant 0 \text{ pe } \mathcal{D} - \boldsymbol{R}. \tag{4.2.10b}$$

Funcția $1/\psi(\varepsilon, \sigma)$ este integrabilă pe orice segment de dreaptă PP^* unde $P = (\varepsilon, \sigma)$, $\varepsilon < 0$ și $\sigma < \sigma_R(\varepsilon)$ și $P^* = (\varepsilon_*, \sigma_R(\varepsilon_*))$, adică

$$\left| \int_{PP^*} \frac{1}{\psi(\varepsilon, \sigma)} \right| < \infty. \tag{4.2.10c}$$

Scanned with OKEN Scanner

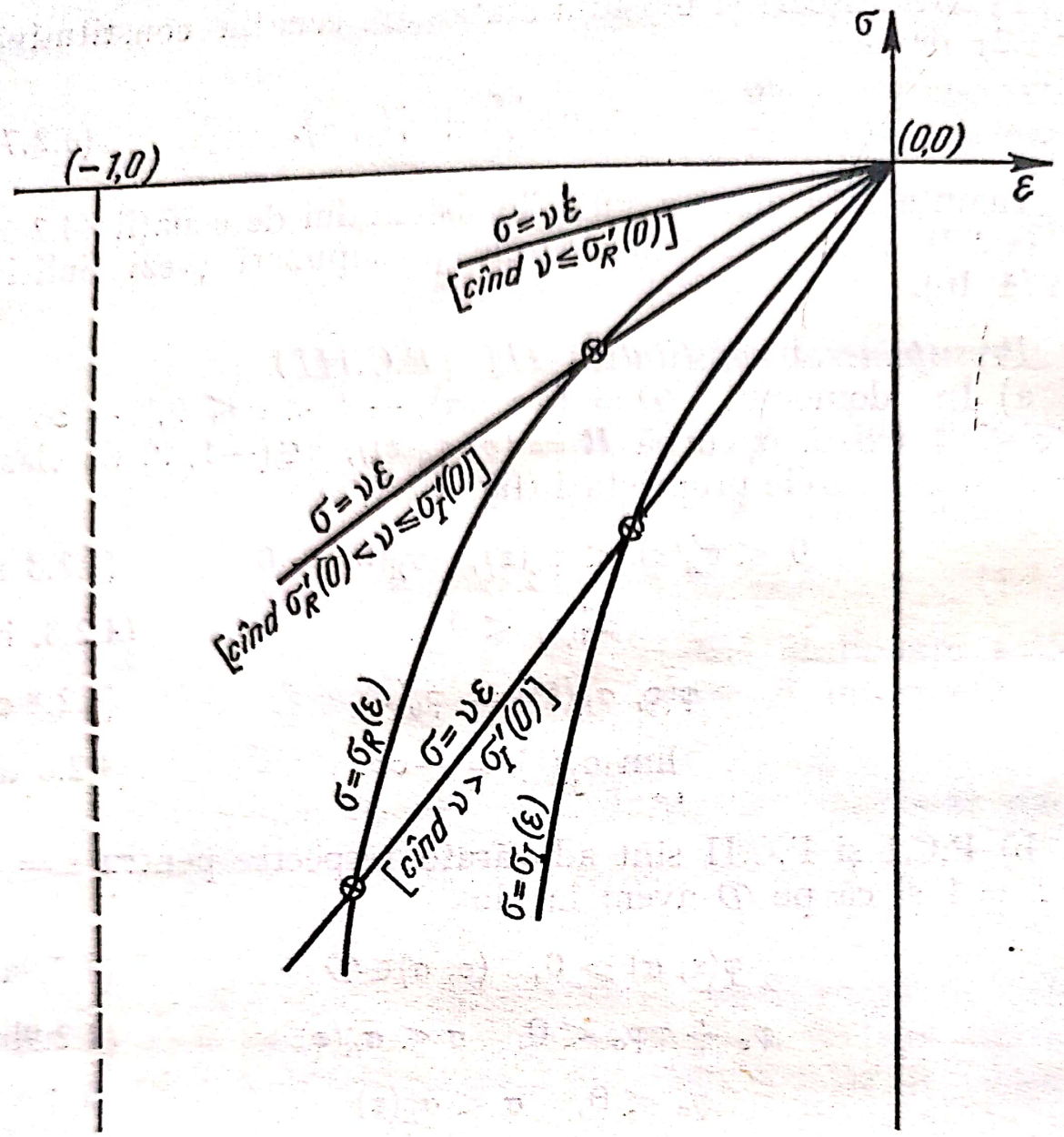


Fig. 4.2.1

Putem acum stabili o serie de consecințe ale acestei ipoteze constitutive. Cea mai mare parte a acestor consecințe au o formă similară celora discutate de Greenberg [1968] deși ipoteza sa 2.1 diferă de P.C.III.

Din P.C.III b) și din teoria ecuațiilor diferențiale rezultă că problema inițială

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \varphi(\varepsilon, \sigma), \quad \sigma(0) = 0 \tag{4.2.11}$$

are o soluție globală unică

$$\sigma = \sigma_I(\varepsilon) \tag{4.2.12}$$

de clasă C^2 pentru $\varepsilon \in (-1, 0]$.

Scanned with OKEN Scanner

Din (4.2.8 a) și (4.2. 8 c) rezultă că

$$\sigma_I(\varepsilon) < \sigma_R(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (-1, 0]. \tag{4.2.13}$$

Această relație se stabilește astfel: deoarece $\sigma_R'(0) < \varphi_0(0) = \varphi(0, 0) = \sigma_I'(0)$; urmează că există un $\varepsilon_0 < 0$ astfel încît $\sigma_R'(\varepsilon) < \sigma_I'(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 0)$ și deci $\sigma_R(\varepsilon) > \sigma_I(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 0)$ (și $\sigma_R(\varepsilon_0) > \sigma_I(\varepsilon_0)$), din (4.2.9 c) rezultă că

$$\varphi(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon)) < \varphi(\varepsilon, \sigma_I(\varepsilon)) \tag{4.2.14}$$

adică și pentru ε_0 avem $\sigma_R'(\varepsilon_0) < \sigma_I'(\varepsilon_0)$ și procedeul de mai sus poate fi extins și la stînga lui ε_0.

Din (4.2.9 b), (4.2.11) și (4.2.12) avem

$$\sigma_I''(\varepsilon) < 0. \tag{4.2.15}$$

Acum aplicînd teorema 4.1.1, în care s-a înlocuit ipoteza de inversabilitate a lui φ în raport cu σ cu ipoteza de existență a unei curbe globale $\sigma = \sigma_R(\varepsilon)$ în lungul căreia (4.2. 8c) este satisfăcută, obținem că

$$\psi(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon)) = 0 \tag{4.2.16}$$

adică $\sigma = \sigma_R(\varepsilon)$ este o curbă de relaxare. Din aceeași teoremă și din (4.2.13) obținem că

$$\psi(\varepsilon, \sigma) > 0 \quad \text{pentru } \sigma < \sigma_R(\varepsilon). \tag{4.2.17}$$

Din teorema 4.1.1 rezultă că integrala din (4.2.10 c) este finită pentru cazul cînd segmentul PP^* este vertical. Se pare însă că (4.2.10 a), (4.2.10 b) și teorema 4.1.1 nu implică (4.2.10 c), în general, exemplele (4.1.12) și (4.1.13) satisfac însă cerințele lui P.C.III c) cum se poate ușor verifica.

În cele ce urmează vom presupune că P.C.III este satisfăcută și vom lucra cu cîmpurile staționare (ε, σ) care satisfac (4.2.5) și (4.2.7). Vom spune că o pereche de funcții (ε, σ) este o încărcare compresivă dacă funcțiile sînt mărginite și monoton descrescătoare în R și satisfac condiția în amonte

$$\lim_{\xi \to -\infty} \varepsilon(\xi) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{\xi \to -\infty} \sigma(\xi) = \sigma_R(0) = 0. \tag{4.2.18}$$

(4.2.18) poate fi considerat ca o afirmație că la $-\infty$ există o situație de echilibru. Printr-o soluție de încărcare compre-

Scanned with OKEN Scanner

sivă vom înțelege o pereche de funcții (ε, σ) care este o încărcare progresivă, ce verifică peste tot (4.2.5) și verifică aproape peste tot în R pe (4.2.7). Notăm că perechea $(\varepsilon, \sigma) = (0, 0)$ este o soluție de încărcare compresivă trivială.

O pereche de funcții care este o încărcare compresivă (ε, σ) definește o soluție de încărcare compresivă dacă și numai dacă această pereche satisface

$$\sigma = \nu\varepsilon \quad \text{pentru toți } \xi \in R \tag{4.2.19}$$

și (4.2.7) aproape peste tot în R.

Demonstrarea necesității acestei afirmații rezultă din (4.2.5) și (4.2.18); suficiența este imediată.

Pentru funcții care sînt încărcări compresive, introducem următoarele notații

$$C_R = \left(\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma_R}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)^{1/2}, \quad C_I = \left(\frac{1}{\rho_0}\varphi(0, 0)\right)^{1/2}. \tag{4.2.20}$$

C_I are semnificația de viteză a sunetului în raport cu configurația naturală de repaus în timp ce C_R nu are o astfel de semnificație și ca atare este impropriu numită uneori viteză de echilibru a sunetului.

Deoarece $\nu = \rho_0 V_0^2$, avem

$$\begin{gathered} V_0 \leqslant C_R \Leftrightarrow \nu \leqslant \sigma_R'(0) \\ C_R < V_0 < C_I \Leftrightarrow \sigma_R'(0) < \nu < \varphi(0, 0) \\ C_I \leqslant V_0 \Leftrightarrow \varphi(0, 0) \leqslant \nu. \end{gathered} \tag{4.2.21}$$

Următoarele rezultate sînt evidente:

i) Dacă $V_0 > C_R$, atunci există un număr unic $\varepsilon_R \in (-1, 0)$ care satisface

$$\sigma_R(\varepsilon_R) = \nu\varepsilon_R \tag{4.2.22}$$

și

$$\sigma_R'(\varepsilon_R) - \nu > 0. \tag{4.2.23}$$

ii) Dacă $V_0 > C_I$ atunci există un număr unic $\varepsilon_I \in (-1, 0)$ care satisface

$$\sigma_I(\varepsilon_I) = \nu\varepsilon_I \tag{4.2.24}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$\sigma_I'(\varepsilon_I) - \nu > 0. \tag{4.2.25}$$

iii) Dacă ipoteza ii) este satisfăcută, atunci ε_R și ε_I sînt ordonate cum urmează

$$-1 < \varepsilon_R < \varepsilon_I < 0. \tag{4.2.26}$$

Situația grafică a acestor afirmații poate fi văzută pe figura 4.2.1.

Facem acum o altă observație utilă. Din (4.2.10 c), (4.2.17) și din faptul că pentru $V_0 > C_R$, $\nu\varepsilon < \sigma_R(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon \in (\varepsilon_R, 0)$, unde ε_R satisface relația $\nu\varepsilon_R = \sigma_R(\varepsilon_R)$ obținem că

$$0 < \int_{\varepsilon_R}^{0} \frac{d\varepsilon}{\psi(\varepsilon, \nu\varepsilon)} < \infty. \tag{4.2.27}$$

Acum putem enunța analogul teoremei 3.1 a lui Greenberg [1968] (vezi de asemenea Suliciu [1974 b]).

Teorema 4.2.1 i) Dacă $V_0 \leqslant C_R$ nu există soluție de încărcare compresivă netrivială.

ii) Dacă $C_R < V_0 < C_I$, atunci există o soluție de încărcare compresivă, netrivială, de clasă C^1. Această soluție are proprietatea că pentru orice $\xi_* \in R$ și orice $\varepsilon_* \in (\varepsilon_R, 0)$ există un interval finit (a, b), $a < b$ conținînd ξ_* astfel încît

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi}(\xi) < 0, \quad \xi \in (a, b)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi}(\xi) = 0, \quad \xi \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$$

$$\varepsilon(b) = \varepsilon_R, \quad \varepsilon(a) = 0.$$

Diferența

$$b - a = -\int_{\varepsilon_R}^{0} \frac{[\nu - \varphi(\varepsilon, \nu\varepsilon)]\, d\varepsilon}{\psi(\varepsilon, \nu\varepsilon)} \tag{4.2.28}$$

nu depinde de $\xi_* \in R$ și de $\varepsilon_* \in (\varepsilon_R, 0)$ și poate fi numită grosimea undei staționare.

iii) Dacă $C_I < V_0$ atunci nu există o soluție de încărcare compresivă netrivială de clasă C^1, dar există o soluție

Scanned with OKEN Scanner

de încărcare compresivă netrivială cu următoarele proprietăți:

a) Funcțiile σ și ε sînt continui și au primele derivate funcții continui pe S_0 unde

$$S_0 = R - \{\xi_0\} \tag{4.2.29}$$

iar $\xi_0 \in R$ și este fixat.

b) $\varepsilon(\xi) = 0$ și $\sigma(\xi) = 0$ pentru $\xi \in (-\infty, \xi_0)$

c) $\varepsilon(\xi_0) = \varepsilon_I$ și $\sigma(\xi_0) = \nu\varepsilon_I$

unde ε_I este dat de (4.2.24) și

d) există un număr $b > \xi_0$ astfel încît $\frac{d\varepsilon}{d\xi}(\xi) < 0$ pentru $\xi \in (\xi_0, b)$, $\varepsilon(\xi) = \varepsilon_R$ pentru $\xi \geqslant b$, $\sigma(\xi) = \nu\varepsilon(\xi)$ pentru $\xi \geqslant \xi_0$, iar ε_R satisface (4.2.22) și (4.2.26). Diferența $b - \xi_0$ este determinată de

$$b - \xi_0 = -\int_{\varepsilon_R}^{\varepsilon_I} \frac{[\nu - \varphi(\varepsilon, \nu\varepsilon)]\, d\varepsilon}{\psi(\varepsilon, \nu\varepsilon)} \tag{4.2.30}$$

și nu depinde de punctul ξ_0 ales.

iv) Dacă $V_0 = C_I$ atunci există o soluție de încărcare compresivă netrivială cu următoarele proprietăți:

a) Funcțiile ε și σ sînt continue pe R și au primele derivate funcții continue pe S_0, unde S_0 este definit de (4.2.29).

b) $\varepsilon(\xi) = 0$ și $\sigma(\xi) = 0$ pentru $\xi \in (-\infty, \xi_0)$

c) $\lim\limits_{\xi \to \xi_0^+} \frac{d\varepsilon}{d\xi}(\xi) = -\infty$

d) Există un număr $b > \xi_0$ astfel încît $\frac{d\varepsilon}{d\xi}(\xi) < 0$ pentru toți $\xi \in (\xi_0, b)$, $\varepsilon(\xi) = \varepsilon_R$ pentru $\xi \geqslant b$, $\sigma(\xi) = \nu\varepsilon(\xi)$ pentru $\xi \geqslant \xi_0$ iar ε_R satisface (4.2.22). Diferența $b - \xi_0$ este determinată de

$$b - \xi_0 = -\int_{\varepsilon_R}^{0} \frac{[\nu - \varphi(\varepsilon, \nu\varepsilon)]\, d\varepsilon}{\psi(\varepsilon, \nu\varepsilon)} \tag{4.2.31}$$

Demonstrația lui i) Presupunem că afirmația i) este falsă; adică presupunem că există o pereche de funcții $(\varepsilon, \sigma) \neq (0, 0)$ care sînt mărginite, descrescătoare și satisfac condițiile (4.2.7), (4.2.18) și (4.2.19). Atunci există un $\xi_0 \in R$ astfel încît

$$\varepsilon(\xi_0) < 0, \quad \sigma(\xi_0) = \nu\varepsilon(\xi_0) < 0$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$[\nu - \varphi(\varepsilon(\xi_0), \nu\varepsilon(\xi_0))] \frac{d\varepsilon(\xi_0)}{d\xi} = \psi(\varepsilon(\xi_0), \nu\varepsilon(\xi_0)). \quad (4.2.32)$$

Deoarece $V_0 < C_R (< C_I)$, $\nu\varepsilon > \sigma_R(\varepsilon)$ pentru orice $\varepsilon \in (-1, 0)$ și din (4.2.9 d) rezultă că

$$\varphi(\varepsilon(\xi_0), \nu\varepsilon(\xi_0)) = \varphi_0(\varepsilon(\xi_0)) > \varphi_0(0) > \nu. \quad (4.2.33)$$

Introducem funcția

$$g(\lambda) = \psi(\varepsilon(\xi_0), (1 - \lambda)(\sigma_R(\varepsilon(\xi_0) + \alpha) + \\ + \lambda\nu\varepsilon(\xi_0)), \quad \lambda \in (0, 1) \quad (4.2.34)$$

unde $\alpha > 0$ și arbitrar de mic. Atunci datorită lui (4.2.10 a) și (4.2.10 b) putem scrie

$$g(1) = g(0) + \psi_\sigma(\lambda^*)[\nu\varepsilon(\xi_0) - \sigma_R(\varepsilon(\xi_0)) - \alpha], \quad \lambda^* \in (0, 1)$$

de unde

$$g(1) \leqslant g(0)$$

sau

$$\psi(\varepsilon(\xi_0), \nu\varepsilon(\xi_0)) \leqslant \psi(\varepsilon(\xi_0), \sigma(\varepsilon(\xi_0)) + \alpha).$$

Luînd $\alpha \to 0$ obținem

$$\psi(\varepsilon(\xi_0), \nu\varepsilon(\xi_0)) \leqslant 0. \quad (4.2.35)$$

Din această relație și din (4.2.32) și (4.2.33) obținem

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi}(\xi_0) \geqslant 0$$

ceea ce contrazice faptul că ε trebuie să fie descrescător.

Demonstrația lui ii) Din faptul că $C_R < V_0 < C_I$ și din (4.2.8 a), (4.2.14) și (4.2.21) avem că

$$\varphi(\varepsilon, \nu\varepsilon) > \varphi(\varepsilon, \sigma_R(\varepsilon)) > \varphi_0(0) > \nu \quad (4.2.36)$$

pentru $\varepsilon \in (\varepsilon_R, 0)$, iar din faptul că $\nu\varepsilon < \sigma_R(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon \in (\varepsilon_R, 0)$ și din (4.2.17) avem

$$\psi(\varepsilon, \nu\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon \in (\varepsilon_R, 0). \quad (4.2.37)$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema inițială

$$[\nu - \varphi(\varepsilon, \nu\varepsilon)] \frac{d\varepsilon}{d\xi} = \psi(\varepsilon, \nu\varepsilon), \ \varepsilon(\xi_*) =$$

$$= \varepsilon_* \in (\varepsilon_R, 0), \quad \xi_* \in R \tag{4.2.38}$$

are o soluție unică ce trece prin punctul (ξ_*, ε_*), pe un interval suficient de mic (a_*, b_*) conținînd ξ_*. Din (4.2.36) și din (4.2.37) urmează că $\frac{d\varepsilon}{d\xi}(\xi) < 0$ pentru $\xi \in (a_*, b_*)$. Din teoria ecuațiilor diferențiale se știe că această soluție poate fi extinsă la dreapta pînă la un b astfel ca $\lim\limits_{\substack{\xi \to b \\ \xi < b}} \varepsilon(\xi) = \varepsilon_R$ și la stînga pînă la un a astfel ca $\lim\limits_{\substack{\xi \to a \\ \xi > a}} \varepsilon(\xi) = 0$. Deoarece avem

$$a_* - \xi_* = \int_{\xi_*}^{\varepsilon(a_*)} \frac{[\nu - \varphi(\varepsilon, \nu\varepsilon)]\, d\varepsilon}{\psi(\varepsilon, \nu\varepsilon)} \tag{4.2.39}$$

și

$$\xi_* - b_* = \int_{\varepsilon(b_*)}^{\varepsilon_*} \frac{[\nu - \varphi(\varepsilon, \nu\varepsilon)]\, d\varepsilon}{\psi(\varepsilon, \nu\varepsilon)} \tag{4.2.40}$$

și deoarece (4.2.10 c) implică că integralele sînt finite pentru $\varepsilon(a_*) \to 0$ și $\varepsilon(b_*) \to \varepsilon_R$, urmează că a și b sînt finite. Deoarece $\psi(\varepsilon_R, \sigma_R(\varepsilon_R)) = 0$ și $\psi(0, 0) = 0$ urmează din (4.2.38) că $\frac{d\varepsilon}{d\xi}(\xi) = 0$ pentru $\xi \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Adunînd (4.2.39) cu (4.2.40) și făcînd $a_* \to a$ și $b_* \to b$ obținem (4.2.28).

Demonstrația lui iii) Faptul că nu există o soluție de încărcare compresivă netrivială de clasă C^1 se arată ca la punctul i).

Fie acum un $\xi_0 \in R$ fixat. Atunci dacă luăm $\varepsilon(\xi) = 0$, $\sigma(\xi) = 0$ pentru $\xi < \xi_0$ iar ecuației (4.2.32) îi atașăm condiția inițială $\varepsilon(\xi_0) = \varepsilon_I$ atunci există un $b \in R$, $b > \xi_0$ astfel încît soluția acestei probleme verifică toate condițiile de la punctul iii). Demonstrația se face la fel ca la punctul ii).

Demonstrația lui iv) Trebuie să arătăm că soluția $\varepsilon(\xi) = 0$ și $\sigma(\xi) = 0$ pentru $\xi \in (-\infty, \xi_0)$ are o extindere pentru

Scanned with OKEN Scanner

$\xi \geqslant \xi_0$ care verifică a), c) și d). Pentru aceasta atașăm ecuației (4.2.32) următoarea condiție inițială $\varepsilon(\xi_0) = \varepsilon_*$ unde $\xi_* \in (\xi_0, b)$ cu b determinat de (4.2.31) și $\varepsilon_* \in (\varepsilon_R, 0)$. ξ_* și ε_* sînt aleși astfel ca să verifice relația

$$\xi_* - \xi_0 = -\int_{\varepsilon_*}^{0} \frac{[\nu - \varphi(\varepsilon, \nu\varepsilon)]\, d\varepsilon}{\psi(\varepsilon, \nu\varepsilon)}.$$

Soluția ecuației, trecînd prin punctul (ξ_*, ε_*) poate fi extinsă pentru toți $\xi \in (\xi_0, b)$ și are proprietatea că $\frac{d\varepsilon}{d\xi} < 0$ pe acest interval. Pentru $\xi = b$, $\varepsilon(b) = \varepsilon_R$ și $\frac{d\varepsilon}{d\xi}(b) = 0$. Dacă luăm $\varepsilon(\xi) = \varepsilon_R$ pentru $\xi \geqslant b$ atunci punctul d) este verificat. Pe S_0, $\varepsilon(\xi)$ și $\sigma(\xi) = \nu\varepsilon(\xi)$ sînt de clasă C^1. Deoarece $\lim\limits_{\xi \to \xi_0^+} \varepsilon(\xi) = 0$ urmează că și a) este verificat.

Din (4.2.32) avem

$$\lim_{\xi \to \xi_0^+} \frac{d\varepsilon}{d\xi} = \lim_{\xi \to 0-} \frac{\psi(\varepsilon, \nu\varepsilon)}{\nu - \varphi(\varepsilon, \nu\varepsilon)}.$$

Acum, deoarece $\psi(\varepsilon, \nu\varepsilon) > 0$ pentru $\varepsilon < 0$ și $\psi(0, 0) = 0$ iar ψ este continuă în $(0, 0)$ dar nu poate fi Lipschitziană (vezi teorema 4.1.1) și $\nu - \varphi(\varepsilon, \nu\varepsilon)$ este de clasă C^1 și $\nu = \varphi(0, 0) = \varphi_0(0)$ urmează că și c) este adevărat.

§3. Asupra soluției ecuației diferențiale (4.1.2) pentru materiale cu comportare de tip rate

În cele ce urmează vom avea nevoie de unele clase speciale de funcții.

O funcție $f : [a, b] \to R^n$, $a < b$, $a, b \in R$ se numește riglată pe $[a, b]$ dacă ea are limite laterale în orice $t \in (a, b)$ și dacă $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} f(t) = f^+(a)$ și $\lim\limits_{\substack{t \to b \\ t < b}} f(t) = f^-(b)$ există. Mulțimea funcțiilor riglate pe un interval va fi notată cu $\boldsymbol{R}^\circ$. Vom

Scanned with OKEN Scanner

nota cu $\boldsymbol{R}^1$ mulțimea funcțiilor riglate pe intervalul lor de definiție și pentru care următoarele limite există

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} \frac{f(t)-f^-(t_0)}{t-t_0} = f'_s(t_0), \quad \lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} \frac{f(t)-f^+(t_0)}{t-t_0} = f'_d(t_0)$$

oricare ar fi $t_0 \in (a, b)$ și

$$\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} \frac{f(t)-f^+(a)}{t-a} = f'_d(a), \quad \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \frac{f(t)-f^-(b)}{t-b} = f'_s(b)$$

și f'_s, f'_d sînt funcții riglate pe $[a, b]$.

Prin C^{01} vom nota mulțimea funcțiilor continue care au derivate laterale funcții riglate, adică $C^{01} = C^0 \cap \boldsymbol{R}^1$. (Pentru detalii asupra acestor clase de funcții vezi de exemplu Nicolescu [1958], Dieudonné [1968], Suliciu [1973], [1974 c]).

În acest paragraf vom discuta, urmînd pe Suliciu [1973], [1974 c], soluțiile în σ ale ecuației (4.1.2) cînd ε este luat ca element în diverse clase de funcții riglate. Aceste soluții vor depinde, evident, de forma domeniului $\mathcal{D}$ și de clasa din care fac parte funcțiile φ și ψ.

Vom considera că $\mathcal{D}$ este un domeniu simplu și mărginit din planul $\sigma - \varepsilon$. Se spune că $\mathcal{D}$ este simplu în raport cu axele dacă pentru fiecare $(\varepsilon_1, \sigma), (\varepsilon_2, \sigma) \in \mathcal{D}$ avem $(\lambda\varepsilon_1 + (1-\lambda)\varepsilon_2, \sigma) \in \mathcal{D}$ și pentru fiecare $(\varepsilon, \sigma_1), (\varepsilon, \sigma_2) \in \mathcal{D}$ avem $(\varepsilon, \lambda\sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2) \in \mathcal{D}$ oricare ar fi $\lambda \in [0, 1]$. În acest paragraf vom avea de a face în general cu funcții $\varepsilon, \sigma : [t_0, t_1] \to R$, $\varepsilon, \sigma \in \boldsymbol{R}^1[t_0, t_1]$ sau cu funcții aparținînd unor subclase ale lui $\boldsymbol{R}^1[t_0, t_1]$.

De obicei vom lua $t_0 = 0$ și în plus vom presupune că ε (respectiv σ) este definit pe $[0, t_1]$ astfel încît pentru orice t, $\varepsilon(t) = \varepsilon(t-0) = \varepsilon^-(t)$ sau $\varepsilon(t) = \varepsilon(t+0) = \varepsilon^+(t)$ adică ε (respectiv σ) este continuu la stînga sau la dreapta. Vom nota mulțimea funcțiilor din $\boldsymbol{R}^1[0, t_1]$ cu această proprietate prin $\boldsymbol{R}^1_+[0, t_1]$. Aceste presupuneri nu sînt esențiale pentru dezvoltările ce urmează să se facă în acest paragraf, ele au numai rolul de a simplifica întrucîtva discuțiile.

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm că funcțiile φ și ψ din (4.1.2) sînt definite pe închiderea lui $\mathcal{D}$ adică pe $\overline{\mathcal{D}}$ și considerăm toate funcțiile de clasă C^1, $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, ce verifică ecuația

$$\dot{\sigma} = \varphi(\varepsilon, \sigma)\,\dot{\varepsilon} + \psi(\varepsilon, \sigma)$$

și

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad (\varepsilon_0, \sigma_0) \in \mathcal{D} \tag{4.3.1}$$

cu ε_0 și σ_0 fixați. Evident că dacă se dă $\varepsilon \in C^1[0, t_1]$ atunci clasa naturală de funcții în care putem căuta soluțiile $\sigma(t)$ ale prolemei (4.3.1) este clasa funcțiilor netede pe un anume interval $[0, \omega_\varepsilon)$ cu $\omega_\varepsilon' \in (0, t_1]$. Dacă $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1[0, t_1]$ atunci datorită teoremei lui Denjoy mulțimea punctelor de discontinuitate pentru ε este o mulțime de puncte cel mult numărabilă din $[0, t_1]$. Datorită acestei teoreme problema (4.3.1) o putem reformula astfel

$$\dot{\sigma}_d = \varphi(\varepsilon^+, \sigma^+)\,\dot{\varepsilon}_d + \psi(\varepsilon^+, \sigma^+)$$

și

$$\sigma^+(0) = \sigma_0, \quad \varepsilon^+(0) = \varepsilon_0, \tag{4.3.2}$$

$$\dot{\sigma}_s = \varphi(\varepsilon^-, \sigma^-)\,\dot{\varepsilon}_s + \psi(\varepsilon^-, \sigma^-), \quad (\varepsilon_0, \sigma_0) \in \mathcal{D}.$$

În acest mod în punctele în care ε și σ sînt netede, (4.3.2) se reduce la (4.3.1).

Vom încerca să găsim un fel de aplicație care asociază la fiecare $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1[0, t_1]$ (sau $\varepsilon \in C^1[0, t_1]$ sau $\varepsilon \in C^{01}[0, t_1]$) o funcție definită pe un anume subinterval $[0, \omega_\varepsilon] \subset [0, t_1]$ (ω_ε fiind cel mai mare t posibil din $[0, t_1]$) de aceeași clasă ca și ε pe acest subinterval. Se vor da unele condiții de existență, unicitate, continuitate și diferențiabilitate în raport cu topologia convergenței uniforme a acestei aplicații cînd ε parcurge $\boldsymbol{R}^1_*[0, t_1]$ (sau $C^1[0, t_1]$, $C^{01}[0, t_1]$).

O pereche de funcții $(\varepsilon(t), \sigma(t)) \in \mathcal{D}$ pentru $t \in [0, \omega)$ va fi numită o soluție de clasă $\boldsymbol{R}^1_*$ pentru problema (4.3.2) dacă pentru orice $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1_*[0, t_1]$ cu $\varepsilon^+(0) = \varepsilon_0$ există un $\omega_\varepsilon \in (0, t_1]$ și un $\sigma : [0, \omega_\varepsilon) \to R$, de clasă $\boldsymbol{R}^1_*$, astfel că perechea $(\varepsilon(t), \sigma(t))$ verifică (4.3.2) pentru toți $t \in [0, \omega_\varepsilon)$ și pentru un $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1_*[0, t_1]$ dat, ω_ε este cel mai mare t cu această proprietate.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a afla o soluție a problemei (4.3.1) noi vom aplica metoda lui Lagrange a variației parametrilor. Pentru aceasta vom considera mai întîi problema

$$\dot{\sigma} = \varphi(\varepsilon, \sigma)\,\dot{\varepsilon}, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad (\varepsilon_0, \sigma_0) \in \mathcal{D}. \tag{4.3.3}$$

Dacă φ este „suficient de bună" și $\varepsilon \in C^1[0, t_1]$, $\dot{\varepsilon}(t) \neq 0$ pe $[0, t_1]$ atunci poate fi găsită o soluție globală „suficient de bună" (vezi Hartman [1964], Cap. II, III, V, Coddington și Levinson [1955] Cap. I, II) pentru orice $(\varepsilon_0, \sigma_0) \in \mathcal{D}$:

$$\sigma = f(\varepsilon, \varepsilon_0, \sigma_0), \quad \varepsilon \in (\omega_-, \omega_+), \quad \omega_\pm = \omega_\pm(\varepsilon_0, \sigma_0) \tag{4.3.4}$$

a următoarei probleme

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \varphi(\varepsilon, \sigma), \quad \sigma(\varepsilon_0) = \sigma_0, \quad (\varepsilon_0, \sigma_0) \in \mathcal{D}. \tag{4.3.5}$$

Soluția (4.3.4) are următoarele proprietăți

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \varphi(\varepsilon, f), \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_0} > 0, \frac{\partial f}{\partial \sigma_0}(\varepsilon_0, \varepsilon_0, \sigma_0) = 1$$

$$(\varepsilon, f(\varepsilon, \varepsilon_0, \sigma_0)) \in \mathcal{D} \quad \text{pentru } \varepsilon \in (\omega_-, \omega_+) \tag{4.3.6}$$

$$(\omega_\pm, \lim_{\varepsilon \to \omega_\pm} f(\varepsilon, \varepsilon_0, \sigma_0)) \in . \mathcal{D}$$

Acum este evident că putem omite restricția $\dot{\varepsilon}(t) \neq 0$; în plus, putem lua ε, o funcție din $\boldsymbol{R}^1_*[0, t_1]$ și f din (4.3.4) va da o soluție a problemei

$$\dot{\sigma}_d = \varphi(\varepsilon^+, \sigma^+)\,\dot{\varepsilon}_d, \quad \sigma^+(0) = \sigma_0, \quad \varepsilon^+(0) = \varepsilon_0$$

$$\dot{\sigma}_s = \varphi(\varepsilon^+, \sigma^+)\,\dot{\varepsilon}_s, \quad (\varepsilon_0, \sigma_0) \in \mathcal{D}. \tag{4.3.7}$$

Dacă alegem $\omega \in (0, t_1]$ astfel încît $(\varepsilon(t), f(\varepsilon(t), \varepsilon_0, \sigma_0)) \in \mathcal{D}$ pentru $t \in [0, \omega)$. De fapt noi trebuie să alegem ω astfel încît $\varepsilon(t) \in (\omega_-, \omega_+)$ pentru $t \in [0, \omega)$.

Putem demonstra următoarea teoremă.

Teorema 4.3.1 Fie $\varphi : \overline{\mathcal{D}} \to R$, φ și $\partial\varphi/\partial\sigma$ continue pe $\overline{\mathcal{D}}$. Presupunem că $\mathcal{D}$ este un domeniu simplu și mărginit din planul $\varepsilon 0 \sigma$. Fie $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1_*[0, t_1]$, $\sigma_0 \in R$ și $\varepsilon^+(0) = \varepsilon_0$ astfel încît $(\varepsilon_0, \sigma_0) \in \mathcal{D}$. De asemenea presupunem că există o funcție continuă k, depinzînd de ε, $k : [0, t_1] \to R$, $k(t) > 0$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît pentru orice soluție $\sigma \in \boldsymbol{R}^1_*$ a problemei (4.3.7) pentru $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1_*[0, t_1]$ fixat, avem

$$[\sigma] = k[\varepsilon] \tag{4.3.8}$$

unde $[\sigma](t) = \sigma(t + 0) - \sigma(t - 0)$. Atunci problema (4.3.7) are o soluție unică.

Demonstrație. Trebuie să arătăm numai unicitatea. Presupunem că există $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ și $\sigma_1, \sigma_2 \in \boldsymbol{R}^1_*$ astfel încît $(\varepsilon(t), \sigma_1(t)) \in \mathcal{D}$ pentru $t \in [0, \omega_1)$ și $(\varepsilon(t), \sigma_2(t)) \in \mathcal{D}$ pentru $t \in [0, \omega_2)$ sînt soluții ale problemei (4.3.7). Atunci pentru $t \in [0, \omega)$, $\omega = \min(\omega_1, \omega_2)$

$$\dot{\sigma}_{1d} - \dot{\sigma}_{2d} = (\varphi(\varepsilon^+, \sigma_1^+) - \varphi(\varepsilon^+, \sigma_2^+))\, \dot{\varepsilon}_d =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\varepsilon^+, \tilde{\sigma})\, (\sigma_1^+ - \sigma_2^+)\, \dot{\varepsilon}_d;$$

scriem $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$. Atunci din (4.3.8) urmează că σ este continuu. Deci cum $\dot{\varepsilon}_d$ este mărginit pe $[0, t]$ și $\partial\varphi/\partial\sigma$ este mărginit pe $\mathcal{D}$, avem

$$|\dot{\sigma}_d| \leqslant M\, |\sigma|, \quad \sigma(0) = 0. \tag{4.3.9}$$

Această inegalitate implică $\sigma(t) \equiv 0$ pentru $t \in [0, \omega)$ astfel $\sigma_1(t) = \sigma_2(t)$ pentru $t \in [0, \omega)$. Dacă $\omega = \omega_1$, atunci pentru $t \in [\omega_1, \omega_2]$, $\sigma_2(t)$ poate fi considerat ca o extindere a lui $\sigma_1(t)$, ceea ce contrazice maximalitatea lui ω_1 și prin urmare $\omega_1 = \omega_2$.

Dacă căutăm soluții în C^{01} sau în C^1, atunci condiția (4.3.8) este automat satisfăcută, ε și σ fiind continui.

Acum vom folosi metoda lui Lagrange spre a obține o soluție pentru problema (4.3.2). Alegem un $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1_*[0, t_1]$ arbitrar dar fixat, cu $\varepsilon^+(0) = \varepsilon_0$. În locul lui σ_0, punem o funcție necunoscută de t, $\tau(t)$ și determinăm această funcție astfel încît (4.3.2) să fie verificat. Avem

$$\dot{\sigma}_d = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\, (\varepsilon^+, \varepsilon_0, \tau)\, \dot{\varepsilon}_d + \frac{\partial f}{\partial \tau}\, (\varepsilon^+, \varepsilon_0, \tau)\, \dot{\tau}_d =$$

$$= \varphi(\varepsilon^+, f(\varepsilon^+, \varepsilon_0, \tau))\, \dot{\varepsilon}_d + \psi(\varepsilon^+, f(\varepsilon^+, \varepsilon_0, \tau)).$$

Luînd în considerație (4.3.6), noi putem scrie

$$\dot{\tau}_d = \mu(\varepsilon^+, \tau), \quad \tau(0) = \sigma_0 \tag{4.3.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\tau(t) = \sigma_0 + \int_0^t \mu(\varepsilon^+(s), \tau(s))\, ds \tag{4.3.11}$$

unde

$$\mu(\varepsilon, \tau) = \frac{\psi(\varepsilon, f(\varepsilon, \varepsilon_0, \tau))}{\frac{\partial f}{\partial \tau}(\varepsilon, \varepsilon_0, \tau)}. \tag{4.3.12}$$

Datorită echivalenței dintre (4.3.10) și (4.3.11), putem să rezolvăm problema (4.3.2) folosind funcții $\tau \in C^{01}$ pentru $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1_\bullet$ sau $\tau \in C^1$ pentru $\varepsilon \in C^{01}$, adică τ este „grosolan vorbind" cu o clasă „mai bun" decît ε (și σ). τ va fi numit parametrul istoriei și el joacă un rol de variabilă internă de stare (vezi Cap. V).

Existența și unicitatea soluției problemei (4.3.10) (sau (4.3.11)) pentru un $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^0_\bullet[0, t_1]$ fixat sînt asigurate în ipoteze destul de slabe asupra funcției μ. Noi ne vom ocupa aici de continuitatea și diferențiabilitatea soluției cînd ε se mișcă în $\boldsymbol{R}^0_\bullet[0, t_1]$.

De fapt următoarea teoremă poate fi demonstrată.

Teorema 4.3.2 Presupunem că următoarele condiții sînt îndeplinite

i) $\mathcal{D}_0$ este un domeniu plan simplu și mărginit

ii) $\mu : \overline{\mathcal{D}}_0 \to R$ este o funcție continuă și diferențiabilă și $\partial\mu/\partial\sigma$, $\partial\mu/\partial\varepsilon$ sînt mărginite pe $\mathcal{D}_0$,

iii) ε_0, σ_0, ε_n^0, σ_n^0 sînt numere reale cu proprietățile

$$(\varepsilon_0, \sigma_0), (\varepsilon_n^0, \sigma_n^0) \in \mathcal{D}_0, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^0 = \varepsilon_0 \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n^0 = \sigma_0$$

iv) $\varepsilon_n, \varepsilon \in \boldsymbol{R}^0_\bullet[0, t_1]$, $\varepsilon_n^+(0) = \varepsilon_n^0$, $\varepsilon^+(0) = \varepsilon_0$ și $\varepsilon_n \to \varepsilon$ cînd $n \to \infty$ în norma $\| \varepsilon \| = \max_{t\in[0,t_1]} |\varepsilon(t)|$.

Atunci: I) pentru fiecare problemă

$$\tau(t) = \sigma_0 + \int_0^t \mu(\varepsilon(s), \tau(s))\, ds$$

$$\tau_n(t) = \sigma_n^0 + \int_0^t \mu(\varepsilon_n(s), \tau_n(s))\, ds$$

Scanned with OKEN Scanner

există intervale maxime $[0, \omega) \subseteq [0, t_1]$, $[0, \omega_n) \subseteq [0, t_1]$ $[\omega, \omega_n \in (0, t_1)]$ și $\tau(t)$, $\tau_n(t)$ funcții din C^{01} unic determinate astfel încît $(\varepsilon(t), \tau(t)) \in \mathcal{D}_0$ pentru $t \in [0, \omega)$, $(\varepsilon_n(t), \sigma_n(t)) \in \mathcal{D}_0$ pentru $t \in [0, \omega_n)$ și $(\varepsilon(\omega - 0), \tau(\omega - 0)) \in \overline{\mathcal{D}}_0$ $(\varepsilon_n(\omega_n - 0), \tau_n(\omega_n - 0)) \in \overline{\mathcal{D}}_0$ și dacă $\omega < t_1$ și $\omega_n < t_1$, atunci $(\varepsilon(\omega + 0), \tau(\omega - 0)) \notin \overline{\mathcal{D}}_0$, $(\varepsilon_n(\omega_n + 0), \tau_n(\omega_n - 0)) \notin \mathcal{D}_0$. Cînd $n \to \infty$ avem

$$\omega \leqslant \lim_{n \to \infty} \inf \omega_n, \quad \tau(t) = \lim_{n \to \infty} \tau_n(t), \quad t \in [0, \omega)$$

II) Aplicația $\varepsilon(\cdot) \to \tau(\cdot)$ este o aplicație continuă și diferențiabilă Fréchet în raport cu convergența uniformă.

Demonstrație. Demonstrația primei părți a acestei teoreme este similară cu demonstrațiile clasice asupra dependenței continue a soluțiilor de datele inițiale (vezi de exemplu, Hartman [1964], Cap. II, III, V, Coddington și Levinson [1955] Cap. I, II). Noi vom da o demonstrație pentru ultima parte a acestei teoreme.

Fie $\varepsilon, l \in \boldsymbol{R}^1_*[0, t_1]$ (funcții continue la dreapta sau la stînga din $\boldsymbol{R}^0[0, t_1]$) astfel încît $(\varepsilon_0, \sigma_0), (\varepsilon_0 + \lambda l_0, \sigma_0) \in \mathcal{D}_0$, $(\varepsilon_0 = \varepsilon^+(0), l_0 = l^+(0))$ pentru un λ suficient de mic. Atunci există $\omega, \omega_\lambda \in (0, t_1]$, $\omega \leqslant \lim_{\lambda \to 0} \inf \omega_\lambda$ și $\tau(t), \tau_\lambda(t)$ astfel încît

$$\tau_\lambda(t) - \tau(t) = \int_0^t [\mu(\varepsilon + l\lambda, \tau_\lambda) - \mu(\varepsilon, \tau_\lambda) + \mu(\varepsilon, \tau_\lambda) -$$

$$- \mu(\varepsilon, \tau)]\, ds = \int_0^t \Big[\lambda \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon}(\varepsilon + l\theta_1\lambda, \tau_\lambda)\, l +$$

$$+ \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon, \theta_2(\tau_\lambda - \tau))\,(\tau_\lambda - \tau)\Big]\, ds \qquad (4.3.13)$$

pentru $t \in [0, \tilde{\omega})$ cu $\tilde{\omega} = \min(\omega, \omega_\lambda)$, $\theta_1 = \theta_1(s)$, $\theta_2 = \theta_2(s)$, $0 \leqslant \theta_1, \theta_2 \leqslant 1$.

Introducem notațiile

$$V_\lambda = \frac{\tau_\lambda(t) - \tau(t)}{\lambda}, \quad C = \max_{(\varepsilon, \tau) \in \mathcal{D}_0} \left| \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon, \tau) \right|,$$

$$P = \max_{(\varepsilon, \tau) \in \mathcal{D}_0} \left| \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon, \tau) \right|$$

Scanned with OKEN Scanner

și arătăm că $|V_\lambda(t)| \leqslant M < \infty$ pentru orice $|\lambda| \leqslant a$ și $t \in [0, \tilde{\omega})$. Într-adevăr, din (4.3.13) obținem

$$|V_\lambda(t)| \leqslant C \| l \| \tilde{\omega} + P \int_0^t |V_\lambda(s)| \, ds$$

și aplicînd lema lui Gromwall rezultă

$$|V_\lambda(t)| \leqslant C \| l \| \tilde{\omega} \exp(\tilde{\omega} P), \quad t \in [0, \tilde{\omega}). \tag{4.3.14}$$

Relația (4.3.13) poate fi de asemenea scrisă ca

$$V_\lambda(t) - \int_0^t \left[\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \tau) l(s) + \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon, \tau) V_\lambda(s) \right] ds =$$

$$= \int_0^t \left[\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon}(\varepsilon + \lambda \theta_1 l, \tau_\lambda) - \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \tau) \right] l(s) \, ds + \tag{4.3.15}$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon, \tau + \lambda \theta_2 V_\lambda) - \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon, \tau) \right] V_\lambda(s) \, ds.$$

Considerăm acum problema inițială

$$V(t) - \int_0^t \left[\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \tau) l + \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon, \tau) V \right] ds = 0.$$

Această problemă posedă o soluție continuă unică $V \in C^{01}$ $[0, \omega]$ pentru $\varepsilon, l \in \boldsymbol{R}^0_*[0, t_1]$ și $\tau \in C^{01}[0, \omega)$, dată de

$$V(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon, \tau) \, ds \right) \left(\int_0^t \exp\left(- \right. \right.$$

$$\left. \left. - \int_0^s \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon, \tau) ds_1 \right) \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \tau) \, l \, ds \right). \tag{4.3.16}$$

Cum τ_λ este continuu în raport cu $\varepsilon + \lambda l$ și $\partial \mu / \partial \varepsilon$, $\partial \mu / \partial \tau$ sînt continui, atunci conform cu (4.3.14) obținem din (4.3.15), pentru $\lambda \to 0$

$$\lim_{\lambda \to 0} V_\lambda(t) = V(t), \quad t \in [0, \omega)$$

Bazați pe prima parte a acestei teoreme, dacă introducem funcționala $\mathcal{F}$ care asociază la fiecare funcție $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^0_*$ $[0, t_1]$ și la fiecare număr $\sigma_0((\varepsilon_0, \sigma_0) \in \mathcal{D}_0)$ o funcție cu valori reale definită pe un interval $[0, \omega_\varepsilon)$

$$\tau(t) = \mathcal{F}[\varepsilon(\cdot), t, \sigma_0], \quad t \in [0, \omega_\varepsilon) \tag{4.3.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

și luînd în considerație ipoteza ii) a teoremei și formula (4.3.16) putem spune că $\mathcal{F}$ este o aplicație continuă și diferențiabilă și putem scrie

$$\delta\mathcal{F}[\varepsilon(\cdot), t, \sigma_0 | l(\cdot)] = V(t) =$$

$$= \exp\left(\int_0^t \frac{\partial\mu}{\partial\tau}(\varepsilon, \tau)\, ds\right) \times$$

$$\times\left[\int_0^t \exp\left(-\int_0^t \frac{\partial\mu}{\partial\tau}(\varepsilon, \tau)\, ds_1\right) \frac{\partial\mu}{\partial\tau}(\varepsilon, \tau)\, l\, ds\right]. \quad (4.3.18)$$

Acum ne putem întoarce la problema (4.3.2) și demonstra următoarea teoremă.

Teorema 4.3.3 Pentru problema (4.3.2) presupunem că următoarele condiții sînt satisfăcute

i) $\mathcal{D}$ este un domeniu plan simplu și mărginit

ii) $\varphi, \psi : \overline{\mathcal{D}} \to R$ sînt continui pe $\overline{\mathcal{D}}$ și $\partial\varphi/\partial\varepsilon$, $\partial\varphi/\partial\sigma$, $\partial^2\varphi/\partial\sigma^2$, $\partial\psi/\partial\varepsilon$, $\partial\psi/\partial\sigma$ există și sînt continui și mărginite pe $\mathcal{D}$ și

iii) condiția (4.3.8) este satisfăcută.

Atunci pentru orice $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1_*[0, t_1]$, $\varepsilon^+(0) = \varepsilon_0$:

I) Există $\omega \in (0, t_1]$ și $\sigma : [0, \omega) \to R$ astfel că $(\varepsilon(t), \sigma(t))$ unde $\sigma(t)$ este dat de

$$\sigma(t) = f(\varepsilon(t), \varepsilon_0, \tau(t)), \quad t \in [0, \omega)$$

$$\tau(t) = \mathcal{F}[\varepsilon(\cdot), t, \sigma_0] \quad (4.3.19)$$

$$(\dot{\tau}(t) = \mu(\varepsilon(t), \tau), \quad \tau(0) = \sigma_0)$$

este soluția unică (în sensul definiției de la începutul acestui paragraf) a problemei (4.3.2), f și $\mathcal{F}$ fiind determinați de (4.3.4) și (4.3.17) respectiv.

II) Aplicația $\varepsilon \to \sigma$ definită prin (4.3.19) este continuă și diferențiabilă (pentru orice $t \in [0, \omega)$) în sensul topologiei convergenței uniforme.

Demonstrație. Fie $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1_*[0, t_1]$ și $\sigma_0 \in R$ astfel încît $\varepsilon^+(0) = \varepsilon_0$ și $(\varepsilon_0, \sigma_0) \in \mathcal{D}$. Acum noi putem urma procedeul care a fost urmat cînd am obținut rezultatele din formulele (4.3.3)—(4.3.7) și (4.3.10)—(4.3.11), (4.3.13).

Scanned with OKEN Scanner

Noi intenționăm să aplicăm teorema 4.3.2 spre a obține o soluție a problemei (4.3.2). Pentru aceasta avem nevoie să precizăm domeniul de definiție pentru $\mu(\varepsilon, \tau)$ definit prin (4.3.12) pentru un ε_0 fixat. $f(\varepsilon, \varepsilon_0, \tau)$ este definit pentru orice τ cu $(\varepsilon_0, \tau) \in \mathcal{D}$ și $\omega_-(\varepsilon_0, \tau) < \varepsilon < \omega_+(\varepsilon_0, \tau)$ și stabilește o corespondență biunivocă între τ și σ pentru ε_0 și ε fixați.

Notăm prin τ_+ și τ_- cele două valori ale lui τ pentru care segmentul (ε_0, τ) taie $\partial\mathcal{D}$, $(\varepsilon_0, \tau) \in \mathcal{D}$ pentru $\tau \in (\tau_-, \tau_+)$. Considerăm domeniile $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}$ cu $\overline{\mathcal{D}}_n \subset \mathcal{D}_{n+1}$ și $\bigcup_1^\infty \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$ (de exemlpu $\mathcal{D}_n = \{(\varepsilon, \sigma)/(\varepsilon, \sigma) \in \mathcal{D}, \ |\varepsilon| < n, \ |\sigma| < n, \ \text{dist}((\varepsilon, \sigma), \partial\mathcal{D}) > 1/n\}$, vezi de exemplu Hartman [1964], Cap. II) și notăm prin τ_{n-}, τ_{n+} intersecțiile lui (ε_0, τ) cu $\mathcal{D}_n$. Atunci $\text{dist}((\varepsilon_0, \tau_{n\pm}), \partial\mathcal{D}) \geqslant 1/n$ și $(\varepsilon_0, \tau) \in \mathcal{D}$ pentru $\tau \in [\tau_{n-}, \tau_{n+}]$. Proprietățile lui $\omega_\pm(\varepsilon_0, \tau)$ implică că pentru orice $\eta > 0$ și pentru orice $\overline{\tau} \in [\tau_{n-}, \tau_{n+}]$ există vecinătățile $V'(\overline{\tau})$, $V''(\overline{\tau})$ astfel încît

$$\omega_+(\varepsilon_0, \overline{\tau}) + \eta < \omega_+(\varepsilon_0, \tau), \quad \tau \in V'(\overline{\tau})$$

$$\omega_-(\varepsilon_0, \tau) < \omega_-(\varepsilon_0, \overline{\tau}) + \eta, \quad \tau \in V''(\overline{\tau}).$$

Alegem $\eta = 1/n$ și $V_n(\overline{\tau}) = V'(\overline{\tau}) \cap V''(\overline{\tau})$; atunci putem scrie $\omega_-(\varepsilon_0, \tau) - \frac{1}{n} < \omega_-(\varepsilon_0, \tau) < \varepsilon_0 < \omega_+(\varepsilon_0, \bar{\tau}) < \omega_+(\varepsilon_0, \tau) - \frac{1}{n}$ pentru toți $\tau \in V_n(\overline{\tau})$. Acum putem găsi o acoperire finită a lui $[\tau_{n-}, \tau_{n+}]$, să spunem $V_n(\tau_1), \ldots, V_n(\tau_m)$. Alegem $\omega'_-(\varepsilon_0) = \max_{i=1, \ldots, m} \omega_-(\varepsilon_0, \tau_i)$ și $\omega'_+(\varepsilon_0) = \min_{i=1, \ldots, m} \omega_+(\varepsilon_0, \tau_i)$. Atunci $\omega'_-(\varepsilon_0) < \varepsilon_0 < \omega'_+(\varepsilon_0)$. Notăm prin

$$\Delta(\varepsilon_0, \sigma_0) = \{(\varepsilon, \tau)/\varepsilon \in (\omega'_-(\varepsilon_0), \omega'_+(\varepsilon_0)), \tau \in (\tau_{n-}, \tau_{n+},)\}$$

atunci $(\varepsilon, \sigma) \in \mathcal{D}$ unde $\sigma = f(\varepsilon, \varepsilon_0, \tau)$ pentru orice $(\varepsilon, \tau) \in \Delta(\varepsilon_0, \sigma_0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Conform teoremei 4.3.2 pentru $\mu : \Delta(\varepsilon_0, \sigma_0) \to R$ și $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1_*[0, t_1] \subset \boldsymbol{R}^0_*[0, t_1]$ cu $\varepsilon^+(0) = \varepsilon_0$, există un $\omega_1 \in [0, t_1]$ astfel încît

$$\tau(t) = \mathcal{F}[\varepsilon(\cdot), t, \sigma_0], \quad t \in [0, \omega_1] \tag{4.3.20}$$

este o soluție a problemei (4.3.11) și

$$\sigma(t) = f(\varepsilon(t), \varepsilon_0, \tau(t)), \quad t \in [0, \omega_1] \tag{4.3.21}$$

este o soluție a problemei (4.3.2).

Dacă $\omega_1 = t_1$, existența este demonstrată. Presupunem că $\omega_1 < t_1$. Avem $(\varepsilon(\omega_1 - 0), \tau(\omega_1 - 0)) \in \overline{\Delta}(\varepsilon_0, \sigma_0)$ și $(\varepsilon(\omega_1 + 0), \tau(\omega_1 - 0)) \notin \Delta(\varepsilon_0, \sigma_0)$. Există două alternative: ori $(\varepsilon(\omega_1 - 0), \sigma(\omega_1 - 0)) \in \overline{\mathcal{D}}$ și $\varepsilon(\omega_1 + 0)$ nu aparține segmentului $(\omega_-(\varepsilon_0, \tau(\omega_1 - 0)), \omega_+(\varepsilon_0, \tau(\omega_1 - 0))$ și deci $\omega_1 = \omega$ (aceasta sfîrșește demonstrația), ori $(\varepsilon(\omega_1 + 0), \sigma(\omega_1 + 0)) \in \mathcal{D}$ (noi am folosit aici faptul că τ este continuu). Dacă $(\varepsilon(\omega_1 + 0), \sigma(\omega_1 + 0)) \in \mathcal{D}_n$ atunci alegem acest punct în locul lui $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ și construind un alt $\Delta(\varepsilon(\omega_1 + 0), \sigma(\omega_1 + 0))$ noi putem aplica același procedeu ca mai înainte și obținem un $\omega_1' > \omega_1$. Dacă încă sîntem în $\mathcal{D}_n$, atunci aplicînd succesiv același procedeu, obținem ori $\omega_1' = t_1$ ori $(\varepsilon(\omega_1' + 0), \sigma(\omega_1' + 0)) \notin \mathcal{D}_n$ dar acesta este un punct din $\mathcal{D}$. Atunci există un $n_1 > n$ astfel încît $(\varepsilon(\omega_1' + 0), \sigma(\omega_1' + 0)) \in \mathcal{D}_{n_1}$, etc.

În fine, noi găsim un $\omega \leqslant t_1$, astfel încît $(\varepsilon(t), \sigma(t)) \in \mathcal{D}$, $t \in [0, \omega)$ și dacă $\omega < t_1$, $(\varepsilon(\omega - 0), \sigma(\omega - 0)) \in \overline{\mathcal{D}}$ dar $\varepsilon(\omega + 0)$ nu aparține segmentului $(\omega_-(\varepsilon_0, \tau(\omega - 0)), \omega_+(\varepsilon_0, \tau(\omega - 0)))$.

Pentru a demonstra unicitatea soluției, presupunem că există două soluții ale problemei (4.3.2), $(\varepsilon(t), \sigma_1(t)) \in \mathcal{D}$ pentru $t \in [0, \omega^1)$ și $(\varepsilon(t), \sigma_2(t)) \in \mathcal{D}$ pentru $t \in [0, \omega^2)$, cu $\varepsilon^+(0) = \varepsilon_0$, $\sigma_1^+(0) = \sigma_2^+(0) = \sigma_0$.

Aplicînd aceleași argumente ca în demonstrația teoremei 4.3.2 putem conclude că $\sigma_1(t) = \sigma_2(t)$ și $\omega^1 = \omega^2$.

Continuitatea și diferențiabilitatea aplicației $\varepsilon \to f(\varepsilon, \varepsilon_0, \tau)$ sînt consecințe ale proprietăților funcțiilor φ și ψ; acestea implică faptul că $\partial f/\partial \varepsilon$, $\partial f/\partial \tau$ sînt continui. Pe de altă parte continuitatea și diferențiabilitatea lui $\mathcal{F}[\varepsilon(\cdot), t, \sigma_0]$

Scanned with OKEN Scanner

sînt date de teorema 4.3.2. Diferențiala lui f poate fi scrisă astfel

$$\delta f(\varepsilon(t),\ \varepsilon_0,\ \tau(t)\mid l(t)) = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(t),\ \varepsilon_0,\ \tau(t))\, l(t) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \tau}(\varepsilon(t),\ \varepsilon_0,\ \tau(t))\left(\exp\left(\int_0^t \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon(s),\ \tau(s))\, ds\right)\right) \times \tag{4.3.22}$$

$$\times\left[\int_0^t \exp\left(-\int_0^t \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon(s_1),\ \tau(s_1))\, ds_1\right) \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(s),\ \tau(s))\, l(s)\, ds\right]$$

unde $\mu(\varepsilon,\ \tau)$ este dat de (4.3.12). Teorema este complet demonstrată.

Ca o consecință a teoremelor 4.3.3 și 4.3.2, avem că pentru $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^1_*[0,\ t_1]$, $\tau(t)$ este de clasă C^{01} pentru $t \in [0,\ \omega)$ și prin urmare discontinuitățile lui σ la timpul t sînt date numai de discontinuitățile lui ε la același timp t. Discontinuitățile derivatei lui σ depind de asemenea de τ.

Dacă presupunem că $\varepsilon \in C^{01}[0,\ t_1]$, atunci τ este de clasă C^1, și prin urmare discontinuitățile derivatei lui σ la un $t \in [0,\ \omega)$ depind numai de discontinuitățile derivatei lui ε la t, discontinuitățile derivatelor lui ε pe intervalul $[0,\ t)$ nu au influență.

§4. Consecințe ale presupunerilor constitutive P.C.I și P.C.II

În § 1 al acestui capitol s-au discutat restricțiile impuse de experiențele de reîncărcare asupra ecuației constitutive de tip rate. Bazați pe rezultatele din § 1 și § 3 vom discuta alte informații ce se pot obține asupra ecuației constitutive. Rezultatele ce vor fi prezentate sînt conținute în lucrarea lui Suliciu, Malvern și Cristescu [1974] și ele au ca scop principal ca prin identificarea curbei de relaxare cu una obținută experimental să găsească cît mai multe consecințe asupra funcțiilor φ și ψ din ecuația constitutivă (4.1.2) din § 1. Vom discuta aici numai cazul b) din lucrarea citată mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

Vom presupune că experiențele se efectuiază asupra unui material care inițial se afla în configurația naturală de repaus, adică $\varepsilon_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$ astfel că soluția (4.3.18) poate fi scrisă

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= f(\varepsilon(t), \tau(t)) \\ \tau(t) &= \mathcal{F}[\varepsilon(\cdot), t]. \end{aligned} \qquad t \in [0, \omega) \qquad (4.4.1)$$

Vom presupune de asemenea că funcția φ este suficient de netedă astfel încît să putem scrie relația (4.4.1) sub forma unei serii, cum urmează

$$\begin{aligned} \sigma = f(\varepsilon, \tau) = A\varepsilon^{1/2} + \tau + E\varepsilon + E_1\varepsilon^{1/2}\tau + E_2\tau^2 + \\ + C_1\varepsilon^{3/2} + C_2\varepsilon\tau + C_3\varepsilon^{1/2}\tau^2 + C_4\tau^3 + D_1\varepsilon^2 + \\ + D_2\varepsilon^{3/2} + D_3\varepsilon\tau^2 + D_4\varepsilon^{1/2}\tau^3 + D_5\tau^4 + \ldots \end{aligned} \qquad (4.4.2)$$

Deoarece funcția f verifică $(4.3.6)_1$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \tau) = \varphi(\varepsilon, f(\varepsilon, \tau))$$

și aplicînd P.C.II, în ipoteza că $\varphi_0(\varepsilon) = E$, E fiind modulul lui Young, oricărui $\varepsilon \in \mathcal{P}_0$ (vezi § 1) ajungem la concluzia că f trebuie să verifice relația

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_*, \tau(t)) = \varphi(\varepsilon_*, f(\varepsilon_*, \tau(t))) = \\ = E \quad \text{pentru} \quad t \geqslant t_\varepsilon > 0. \end{aligned} \qquad (4.4.3)$$

După cum s-a arătat în § 1, Teorema 4.1.1, P.C.II implică în general existența cel puțin a unei curbe de relaxare, adică a unei curbe $\sigma = \sigma_R(\varepsilon)$ în lungul căreia ψ se anulează.

Dacă aplicăm $(4.4.1)_1$ oricărui $\varepsilon \in \mathcal{P}_0$, atunci conform cu teorema 4.1.1 găsim că

$$\sigma(t) = f(\varepsilon_*, \tau(t)) = \sigma_R(\varepsilon_*) \quad \text{pentru} \quad t \geqslant t_\varepsilon > 0. \qquad (4.4.4)$$

Din $(4.3.6)_1$ putem trage concluzia că

$$\tau = \tau_R(\varepsilon_*) \quad \text{pentru} \quad t \geqslant t_\varepsilon \qquad (4.4.5)$$

adică parametrul istorie τ admite și el o curbă de relaxare.

Vom lua pe rînd aproximațiile de ordinul 1, 2, 3, ... din dezvoltarea (4.4.2) și vom cere ca aceste aproximații să verifice (4.4.3).

Scanned with OKEN Scanner

Prima aproximație

$$\sigma = f_1(\varepsilon, \tau) = A\varepsilon^{1/2} + \tau$$

nu poate verifica condiția (4.4.3).

Pentru a doua aproximație

$$\sigma = f_2(\varepsilon, \tau) = A\varepsilon^{1/2} + \tau + E\varepsilon + E_1\varepsilon^{1/2}\tau + E_2\tau^2 \quad (4.4.6)$$

avem

$$\frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \tau) = \frac{1}{2}\frac{A}{\varepsilon^{1/2}} + E + \frac{1}{2}\frac{E_1\tau}{\varepsilon^{1/2}} \equiv E, \quad t \geqslant t_\varepsilon.$$

Această aproximație conduce la modelul general semilinear propus de Malvern [1951 a, b] dacă luăm

$$A = 0, \quad E_1 = 0 \quad (4.4.7)$$

și

$$\tau_1 = \tau + E_2\tau^2 \quad (4.4.8)$$

unde τ_1 ca funcție de t trebuie să verifice ecuația

$$\tau_1(t) = \psi(\tau_1(t) + E\varepsilon(t), \varepsilon), \quad \tau_1(0) = 0 \quad (4.4.9)$$

iar $\psi \leqslant 0$ pentru $\varepsilon \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$; ceea ce înseamnă că τ_1 trebuie să fie negativ în acest domeniu. Cum se poate vedea, o schimbare a lui ε în $\varepsilon^{1/2}$ induce o schimbare a lui τ după formula (4.4.8).

Înainte de a trece să discutăm aproximațiile de ordin superior lui doi vom adăuga o altă condiție asupra formei funcției f și anume

$$\left.\frac{\partial f(\varepsilon, \tau(\tau_1))}{\partial \tau^1}\right|_{\tau=\tau_R(\varepsilon)} = 1. \quad (4.4.10)$$

Această condiție exprimă continuitatea modelului cvasiliniar spre modelul semilinear, adică în vecinătatea frontierei de relaxare modelul semilinear poate aproxima modelul cvasiliniar (deoarece acolo $f(\varepsilon, \tau(\tau_1)) \approx E\varepsilon + \tau_1$).

Scanned with OKEN Scanner

Aproximațiilor de ordin superior lui 2 le vom aplica atît condiția (4.4.3) cît și (4.4.10). Astfel pentru aproximația de ordinul 3 găsim

$$\frac{\partial f_3}{\partial \varepsilon} = E + \frac{3}{2} C_1 \varepsilon^{1/2} + C_2 \tau +$$

$$+ \frac{1}{2} C_3 \varepsilon^{-1/2} \tau^2 = E, \quad t \geqslant t_\varepsilon \tag{4.4.11}$$

și

$$\frac{\partial f_3}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \tau^1}\Big|_{\tau=\tau_R^3(\varepsilon)} =$$

$$= 1 + \frac{C_2 \varepsilon + 2C_3 \varepsilon^{1/2} \tau + 3C_4 \tau^2}{1 + 2E_2 \tau}\Big|_{\tau=\tau_R^3(\varepsilon)} \equiv 1. \tag{4.4.12}$$

(4.4.11) și (4.4.12) conduc la

$$3C_1 \varepsilon + 2C_2 \varepsilon^{1/2} \tau + C_3 \tau^2 = 0 \tag{4.4.13}$$

$$C_2 \varepsilon + 2C_3 \varepsilon^{1/2} \tau + 3C_4 \tau^2 = 0. \tag{4.4.14}$$

Aceste ecuații trebuie să aibă cel puțin o rădăcină în comun. Dar scopul nostru nu este de a discuta toate posibilitățile. Vom discuta numai cazul cînd (4.4.13) și (4.4.14) au două rădăcini în comun. Pentru aceasta următoarele relații trebuie să fie satisfăcute

$$C_2 = 3\lambda C_1, \quad C_3 = 3\lambda^2 C_1, \quad C_4 = \lambda^3 C_1 \tag{4.4.15}$$

unde λ și C_1 rămîn constante necunoscute.

Introducînd (4.4.15) în (4.4.14) (sau (4.4.13)) și folosind expresia lui $f_3(\varepsilon, \tau)$ obținem

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} \varepsilon^{1/2} = \tau_R^3(\varepsilon) \tag{4.4.16}$$

$$\sigma = \left(E + \frac{1}{\lambda^2} E_2\right) \varepsilon - \frac{1}{\lambda} \varepsilon^{1/2} = \tau_R^3(\varepsilon). \tag{4.4.17}$$

Curba de relaxare (4.4.17) poate aproxima parabola $\sigma = \beta \varepsilon^{1/2}$ găsită experimental de Bell [1961], dacă alegem

$$\lambda = -\frac{1}{\beta} \tag{4.4.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$E + \beta^2 E_2 \approx 0. \tag{4.4.19}$$

Cu alegerea din (4.4.18) și (4.4.19), $E_2 < 0$ și $\tau > 0$, și (4.4.8) dă o corespondență biunivocă între τ și τ_1

$$\tau = \frac{-1-(1+4E_2\tau_1)^{1/2}}{2E_2} \tag{4.4.8'}$$

dacă τ_1 este negativ. Din (4.4.8), (4.4.16), (4.4.18) și (4.4.19) urmează că $\beta\sqrt{\varepsilon} - E\varepsilon = \tau_1$ și τ_1 este negativ pentru $\varepsilon > (\beta/E)^2 = \varepsilon_y$. Deformația ε_y poate fi obținută ca intersecția dintre dreapta elastică $\sigma = E\varepsilon$ și curba $\sigma = \beta\varepsilon^{1/2}$ notată de Cristescu și Bell [1970] prin ε_{Y1}. Rezultatele numerice obținute acolo folosind această deformație ca deformația la punctul de curgere, nu sînt în foarte bun acord cu rezultatele experimentale, dar acolo $\sigma = \beta\varepsilon^{1/2}$ a fost folosită ca ecuație constitutivă întreagă.

Prin urmare, curbele $\sigma = \beta\sqrt{\varepsilon}$ și $\sigma = \sigma_R^3(\varepsilon)$ din (4.4.17) ar putea fi identificate numai pentru $\varepsilon > \varepsilon_y$. Condiția ca τ_1 să fie negativ urmează din faptul că ψ este negativ pentru $\varepsilon \geqslant 0$ și $\sigma \geqslant 0$ și din faptul că $\varepsilon_0 = 0$ și $\sigma_0 = 0$ implică faptul că pentru toate istoriile τ, $f_3(\varepsilon, \tau) \leqslant i_3(\varepsilon)$. În rezumat, pentru aproximația a treia avem următoarele rezultate

$$\sigma = \sigma_R^3(\varepsilon) = \beta\sqrt{\varepsilon} + 0(\varepsilon)$$

$$\tau = \tau_R^3(\varepsilon) = \beta\sqrt{\varepsilon}$$

$$\tau_{1R} = \tau_R - \frac{E}{\beta^2}\tau_R^2 = \beta\sqrt{\varepsilon} - E\varepsilon \tag{4.4.20}$$

$$\sigma = f_3(\varepsilon, 0) = i_3(\varepsilon) = E\varepsilon + C_1\varepsilon^{3/2}$$

$$\sigma = f_3(\varepsilon, \tau) = E\varepsilon + \tau - \frac{E}{\beta^2}\tau^2 + \frac{C_1}{\beta^3}(\beta\sqrt{\varepsilon} - \tau)^3.$$

Termenul $0(\varepsilon)$ din ecuația curbei de relaxare depinde de aproximația luată în (4.4.19). Ecuația $(4.4.20)_4$ dă ecuația curbei instantanee și ecuația $(4.4.20)_5$ descrie întregul proces.

Considerăm acum a patra aproximație

$$\sigma = f_4(\varepsilon, \tau) = E\varepsilon + \tau + E_2\tau^2 + C_1\varepsilon^{3/2} + C_2\varepsilon\tau + \\ + C_3\varepsilon^{1/2}\tau^2 + C_4\tau^3 + D_1\varepsilon^2 + D_2\varepsilon^{3/2}\tau + D_3\varepsilon\tau^2 + \\ + D_4\varepsilon^{1/2}\tau^3 + D_5\tau^4. \tag{4.4.21}$$

Scanned with OKEN Scanner

Găsim pentru $\tau = \tau_R^4(\varepsilon)$ următoarea ecuație

$$D_4\tau^3 + (C_3 + 2D_3\varepsilon^{1/2})\tau^2 + (2C_3\varepsilon^{1/2} + 3D_2\varepsilon)\tau + \\ + (3C_1\varepsilon + 4D_1\varepsilon^{3/2}) = 0 \qquad (4.4.22)$$

Condiția (4.4.10) conduce la ecuația

$$4D_5\tau^3 + (3C_4 + 3D_4\varepsilon^{1/2})\tau^2 + (2C_3\varepsilon^{1/2} + 2D_3\varepsilon)\tau + \\ + C_2\varepsilon + D_2\varepsilon^{3/2} = 0 \qquad (4.4.23)$$

care trebuie să fie satisfăcută pe curba de relaxare.

Ecuațiile (4.4.22), (4.4.23) trebuie să aibă cel puțin o rădăcină în comun. Dacă cerem ca aceste ecuații să aibă aceleași rădăcini, atunci obținem $\sigma_R^4(\varepsilon) = \sigma_R^3(\varepsilon)$ și $\tau_R^4(\varepsilon) = \tau_R^3(\varepsilon)$ și dacă facem identificările (4.4.18) și (4.4.19), obținem modificări numai în ecuația curbei instantanee și în ecuația ce descrie întregul proces. Acestea devin

$$\sigma = f_4(\varepsilon, 0) = i_4(\varepsilon) = E\varepsilon + C_1\varepsilon^{3/2} + D_1\varepsilon^2 \qquad (4.4.24)$$

$$\sigma = f_4(\varepsilon, \tau) = E\varepsilon + \tau - \frac{E}{\beta^2}\tau^2 + \frac{C_1}{\beta^3}(\beta\sqrt{\varepsilon} - \tau)^3 + \\ + \frac{D_1}{\beta^4}(\beta\sqrt{\varepsilon} - \tau)^4.$$

În general vorbind, curba instantanee $\sigma = f(\varepsilon, 0) = i(\varepsilon)$ controlează partea de început a propagării undei printr-un material nedeformat. În acest mod a patra aproximație ar putea da o mai bună descriere a curbei instantanee pentru aceeași frontieră de relaxare.

§5. Observații asupra existenței „platoului" în plasticitatea dinamică

Acest paragraf expune rezultatele obținute de Suliciu, Malvern și Cristescu [1972, 1973] și conține discuții asupra posibilității existenței unui platou absolut sau asimptotic pentru tensiuni, deformații și viteze cînd o bară semi-infinită este încărcată brusc la capăt și cînd o ecuație constitutivă de tip rate este folosită pentru descrierea comportării materialului.

Scanned with OKEN Scanner

S-a observat încă din primele lucrări asupra propagării undelor plastice (Kármán-Duwez [1950], Taylor [1946], Rahmatulin [1945]) că lîngă capătul lovit cu o viteză constantă, al unei bare semi-infinite, deformația maximă este constantă (vezi Cap. II, § 1). Acest rezultat a fost obținut teoretic pentru o ecuație constitutivă finită și un impact instantaneu. Primele experiențe au arătat de asemenea un fel de platou al deformației (vezi Lee [1956]).

Totuși o discuție extensivă asupra posibilității existenței unui platou a început numai după ce Malvern [1951 a, b] și-a publicat cele două lucrări ale sale. După ce Malvern a introdus o ecuație constitutivă de tip rate, semiliniară, pentru a descrie propagarea undelor plastice, a observat că exemplele numerice date de el nu arătau nici un platou. Mulți ani, prezența sau absența unui platou a fost considerată ca fiind argumentul principal în favoarea uneia sau alteia din cele două teorii existente atunci asupra propagării undelor plastice: teoria de tip rate (depinzînd de viteza de deformare) și teoria finită (independentă de viteza de deformare).

În general rezultatele experiențelor cu viteză constantă au arătat întotdeauna un fel de platou, deși în unele cazuri, foarte aproape de capătul lovit, a fost observată o deformație ceva mai mare decît aceea a platoului propriu zis (vezi Cap. II iar pentru bibliografie adițională vezi Bell [1968, 1973], Cristescu [1967]).

Calculele lui Malvern [1951 a, b] nu au arătat nici un fel de platou pentru o teorie semi-liniară de tip rate. Rubin [1954] a arătat că se poate obține un platou asimptotic cînd $t \to \infty$. Calculele lui Cristescu [1965] de data aceasta pentru o bară finită, nu au dat din nou nici un platou. Wood și Phillips [1967], Efron și Malvern [1969] și Kukudjanov [1967] au obținut totuși un fel de platouri asimptotice, cu teorii semi-liniare de tip rate.

Este deja bine stabilit că forma finită a legii tensiune-deformație va prezice platouri pentru tensiune, deformație și viteză. În acest paragraf va fi analizată posibilitatea găsirii unor platouri pentru una sau mai multe din funcțiile menționate, în cazul cînd o ecuație constitutivă de tip rate cvasiliniară sau semiliniară este folosită.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul complet de ecuații descriind mișcarea unei bare este (vezi Cap. I)

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial X}$$

$$\frac{\partial v}{\partial X} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{4.5.1}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \varphi(\varepsilon, \sigma)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \psi(\varepsilon, \sigma).$$

Aici spre deosebire de celelalte paragrafe tensiunea σ și deformația ε sînt luate pozitive în compresiune. În particular, cînd $\varphi = E = \text{const.}$, $(4.5.1)_3$ se reduce la modelul semiliniar al lui Malvern. O formă particulară a acestui model, care va fi folosită, este

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - k[\sigma - \sigma_R(\varepsilon)] \tag{4.5.2}$$

unde k este o constantă pozitivă și $\sigma - \sigma_R(\varepsilon)$ este supratensiunea deasupra unei curbe $\sigma = \sigma_R(\varepsilon)$ tipice pentru fiecare material, curbă care este numită curbă de relaxare sau frontieră de relaxare (Cristescu [1972 b]).

Ecuației $(4.5.1)_3$ îi putem aplica procedeul de integrare în raport cu timpul, dezvoltat în § 4 (vezi de asemenea Suliciu [1973], [1974 c]). Facem acest lucru în vederea eliminării tensiunii din ecuațiile (4.5.1), astfel încît în ecuațiile care guvernează mișcarea barei să apară numai mărimi cinematice, măsurabile în experiențele dinamice. Deoarece pentru ecuația (4.5.2) calculele se pot face explicit și constituie un exemplu pentru § 4, le vom da în cele ce urmează.

Lăsînd la o parte pentru moment, ultimul termen din membrul drept al lui (4.5.2) și integrînd de la un moment inițial t_0 (pentru un X fix dar arbitrar), avem

$$\sigma(X, t) = E[\varepsilon(X, t) - \varepsilon(X, t_0)] + \sigma(X, t_0)$$

unde $\varepsilon(X, t_0) = \varepsilon_0$ este deformația inițială și $\sigma(X, t_0) = \sigma_0$ este tensiunea inițială. Pentru a găsi o soluție a întregii ecuații (4.5.2), termenul $\sigma(X, t_0)$ din ecuația de mai sus va fi înlocuit printr-o funcție $\tau(X, t)$, care va fi determinată

Scanned with OKEN Scanner

apoi prin metoda lui Lagrange a variației parametrilor. Astfel, ultima formulă va fi scrisă ca

$$\sigma = f(\varepsilon, \varepsilon_0, \tau) = E(\varepsilon - \varepsilon_0) + \tau. \tag{4.5.3}$$

Introducînd (4.5.3) în (4.5.2) găsim următoarea ecuație pentru τ

$$\dot{\tau} = -k[\tau + E(\varepsilon - \varepsilon_0) - \sigma_R(\varepsilon)] \tag{4.5.4}$$

cu $\tau(t_0) = \sigma_0$. Prin integrarea directă a lui (4.5.4) τ poate fi determinat ca o funcțională de ε pe un interval $[t_0, t]$.

Astfel, forma integrată a lui (4.5.2) poate fi scrisă sub forma

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + e^{-k(t-t_0)}\left\{\sigma_0 - E\varepsilon_0 - \right.$$

$$\left. - k\int_{t_0}^{t} [E\varepsilon(s) - f(\varepsilon(s))]\, e^{k(s-s_0)}\, ds\right\}. \tag{4.5.5}$$

Este evident din (4.5.3) și (4.5.5) că τ este determinat de forma explicită a lui φ și ψ și depinde de istoria deformației. Din acest motiv τ este numit parametrul istoriei. Structura funcției f din (4.5.3) este determinată numai de φ și pentru ε_0 și τ fixați această funcție descrie răspunsul instantaneu.

Acum din (4.5.5) și $(4.5.1)_1$ se obține, pentru modelul semiliniar (4.5.2)

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + E\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} = ke^{-k(t-t_0)}\left\{\frac{\partial \sigma_0}{\partial X} - E\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial X} + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t}\left[E - \sigma_R'(\varepsilon(s))\right]\frac{\partial \varepsilon(s)}{\partial X}\, e^{k(s-t_0)}\, ds\right\} \tag{4.5.6}$$

care împreună cu $(4.5.1)_2$ formează sistemul de ecuații descriind mișcarea, folosind numai variabile cinematice.

În cazul general al ecuației constitutive $(4.5.1)_3$, dacă funcțiile φ și ψ verifică condițiile teoremei 4.3.3 iar deformația $\varepsilon(X, t)$ este o funcție de clasă $\boldsymbol{R}^1$ în raport cu varia-

Scanned with OKEN Scanner

bilele (X, t) atunci se poate aplica formula (4.3.22) cu $l(s) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial X}(X, s)$ și în locul lui (4.5.6) se obține ecuația integro-diferențială

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \varphi(\varepsilon, f(\varepsilon, \tau)) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} = \tag{4.5.7}$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial \tau} \exp\left[\int_0^t \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon(s), \tau(s))\, ds\right] \int_0^t \left[\exp - \right.$$

$$\left. - \int_0^s \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon(s_1), \tau(s_1))\, ds_1\right] \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X}\, ds$$

unde μ este dat de (4.3.12), adică

$$\mu(\varepsilon, \tau) = \frac{\psi(\varepsilon, f(\varepsilon, \tau))}{\frac{\partial f}{\partial \tau}(\varepsilon, \tau)}$$

și prin urmare

$$\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}\varphi - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}}{\frac{\partial f}{\partial \tau}}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \tau} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)^2 - \psi \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)^2}. \tag{4.5.8}$$

În (4.5.7) pentru simplificarea scrierii s-a presupus că $t_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 0$. Dacă nu va fi menționat explicit altfel, această presupunere va fi păstrată de aici încolo.

Vom trece acum la stabilirea condiției necesare pentru existența unui platou.

În formulele (4.5.6) și (4.5.7) apare termenul $\frac{\partial \varepsilon}{\partial X}$ care este legat de cantități ce pot fi măsurate experimental. Parametrul care poate fi măsurat este „unghiul α al suprafeței", adică unghiul dintre poziția normalei la suprafața laterală în cursul deformației barei și poziția inițială a aceleiași normale. Variația acestui unghi în cursul întregului proces de deformare dinamică poate fi măsurat experimental (vezi Cap. II, § 1, și Bell [1968]).

Scanned with OKEN Scanner

Folosind legea de conservare a masei, se poate obține

$$\operatorname{tg}\alpha = R_0\sqrt{\rho_0}\,\frac{1}{2\rho^{3/2}(1-\varepsilon)^{5/2}}\left[\frac{\partial\rho}{\partial X} - \varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial X} - \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial X}\right] \tag{4.5.9}$$

unde R_0 este raza inițială a barei, ρ_0 este densitatea inițială iar ρ este densitatea actuală.

Versiuni simplificate ale acestei formule au fost date de diverși autori. Astfel, formula

$$\alpha = -\frac{R_0}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial X} \tag{4.5.10}$$

a fost dată de Bell, formula

$$\alpha = -\frac{R_0}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial X}\left(1+\frac{5}{2}\varepsilon\right) \tag{4.5.11}$$

a fost dată de Filbey, și formula

$$\alpha = -\frac{R_0}{2}\frac{1}{(1-\varepsilon)^{5/2}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial X} \tag{4.5.12}$$

a fost dată de Cristescu (pentru literatură vezi Bell [1969]). Toate aceste formule pot fi obținute din (4.5.9) cu ajutorul unor presupuneri simplificatoare (presupunerea de incompresibilitate și prin neglijarea puterilor superioare ale lui ε).

Cunoscînd modul cum variază α într-o experiență de încărcare (vezi Bell [1968]) și folosind formula (4.5.12) se poate conclude că $\partial\varepsilon/\partial X$ din (4.5.6) sau (4.5.7) nu schimbă de semn.

Vom spune că există un platou cînd există un domeniu în planul caracteristic XOt, unde una din derivatele $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ sau $\frac{\partial\omega}{\partial X}$ este zero sau amîndouă sînt simultan zero. Aici ω este una din funcțiile v, ε, σ. S-ar putea găsi un platou fie pentru una din funcții, fie pentru două sau chiar toate trei. Vom spune că avem un „platou în timp" dacă $\frac{\partial\omega}{\partial t} = 0$ și că avem un „platou în spațiu" dacă $\frac{\partial\omega}{\partial X} = 0$. De asemenea vom considera și cazurile cînd amîndouă derivatele sînt simultan nule.

Prin analizarea formulei (4.5.7) se vede că $\frac{\partial f}{\partial\tau} > 0$ (vezi formula $(4.3.6)_1$ § 3). Toți ceilalți termeni care intră în mem-

Scanned with OKEN Scanner

brul drept al ecuației (4.5.7) nu schimbă de semn, cu excepția lui $\partial\mu/\partial\varepsilon$ dat de $(4.5.8)_1$. Pentru ca acest termen să schimbe de semn, trebuie să existe un t_* în intervalul de integrare, unde

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\varphi-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=0 \tag{4.5.13}$$

toate cantitățile intrînd în această egalitate fiind calculate în punctul $(\varepsilon(X, t_*), f(\varepsilon(X, t_*), \tau(X, t_*)))$. Prin urmare condiția (4.5.13) este condiția necesară pentru existența unui platou simultan pentru σ și ε.

Existența unui platou a fost discutată în general în legătură cu lovirea cu viteză constantă a unei bare semi-infinite. Totuși, astfel de platouri pot fi găsite chiar pentru probleme mai realistice ca de exemplu lovirea simetrică a două bare finite și identice. Pentru o astfel de problemă au fost obținute un număr de soluții numerice folosindu-se ecuații constitutive de forma $(4.5.1)_3$ în cazul în care epruveta este lovită cu o viteză $V = 1600$ in/s $= 4064$ cm/s și celălalt capăt este liber.

Pentru unul din aceste cazuri, numit cu XII de Cristescu [1972 b] (vezi de asemenea Cap. III, § 4), cele trei curbe din fig. 4.5.1 arată variația în timp a lui σ, ε, v în diferite secțiuni transversale ale barei. Din aceste figuri se poate vedea cînd una din aceste variabile este constantă ori în timp și spațiu ori numai în timp. Desenele au fost date numai pentru acele secțiuni transversale ale barei unde există unul sau mai multe platouri. Dintre cele trei funcții determinate, deformația este aceea care are platouri în timp în cea mai mare parte a barei.

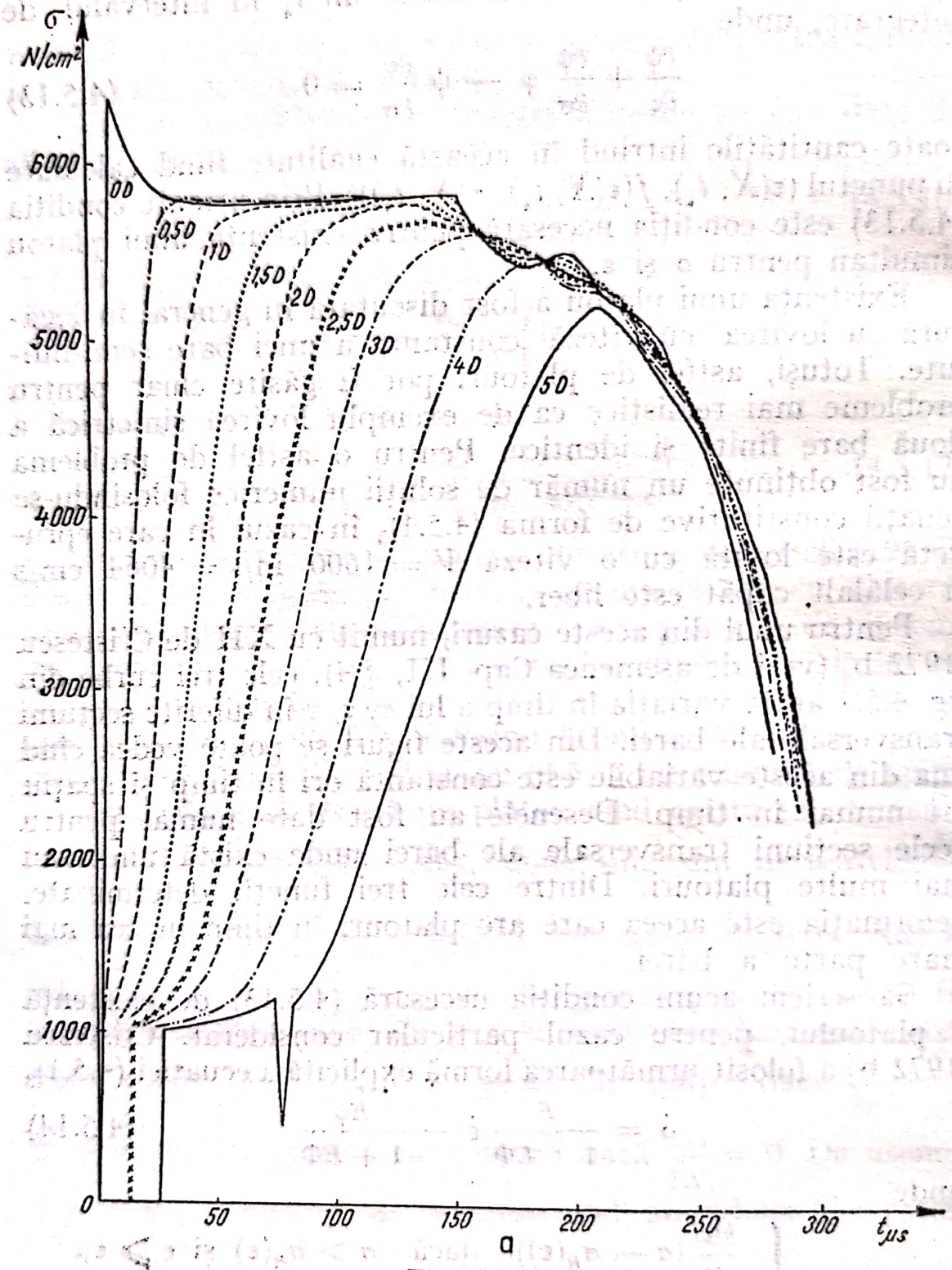
Să scriem acum condiția necesară (4.5.13) de existență a platoului, pentru cazul particular considerat. Cristescu [1972 b] a folosit următoarea formă explicită a ecuației $(4.5.1)_3$

$$\dot\sigma=\frac{E}{1+E\Phi}\dot\varepsilon-\frac{E\psi}{1+E\Phi} \tag{4.5.14}$$

unde

$$\psi(\sigma,\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{k(\varepsilon)}{E}(\sigma-\sigma_R(\varepsilon)) & \text{dacă}\quad \sigma>\sigma_R(\varepsilon)\ \text{și}\ \varepsilon\geqslant\varepsilon_Y\\[2ex] 0 & \text{dacă}\quad \sigma\leqslant\sigma_R(\varepsilon)\ \text{sau}\ \varepsilon<\varepsilon_Y\end{cases} \tag{4.5.15}$$

Scanned with OKEN Scanner



a

Fig. 4.5.1 a.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

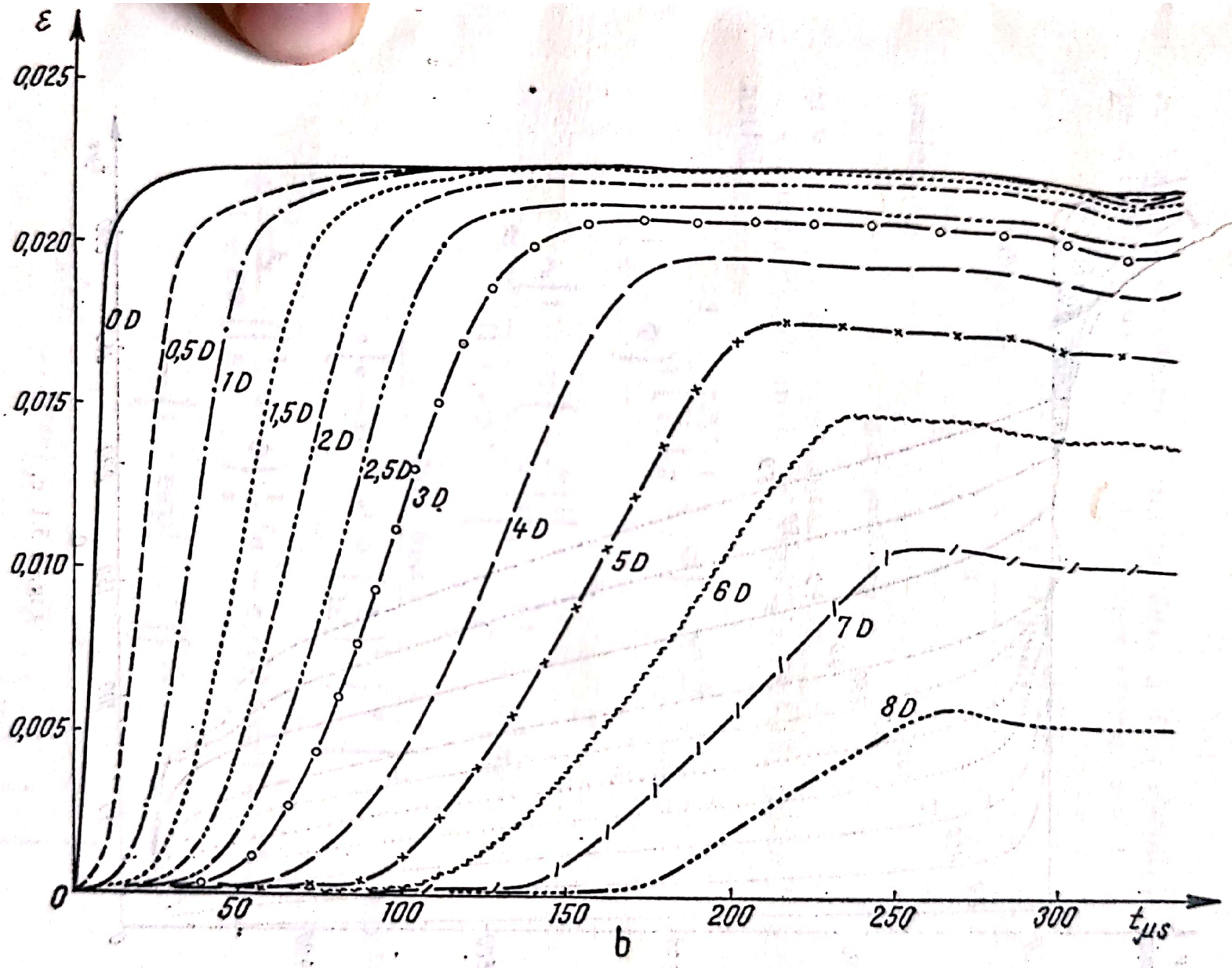


Fig. 4.5.1 b.

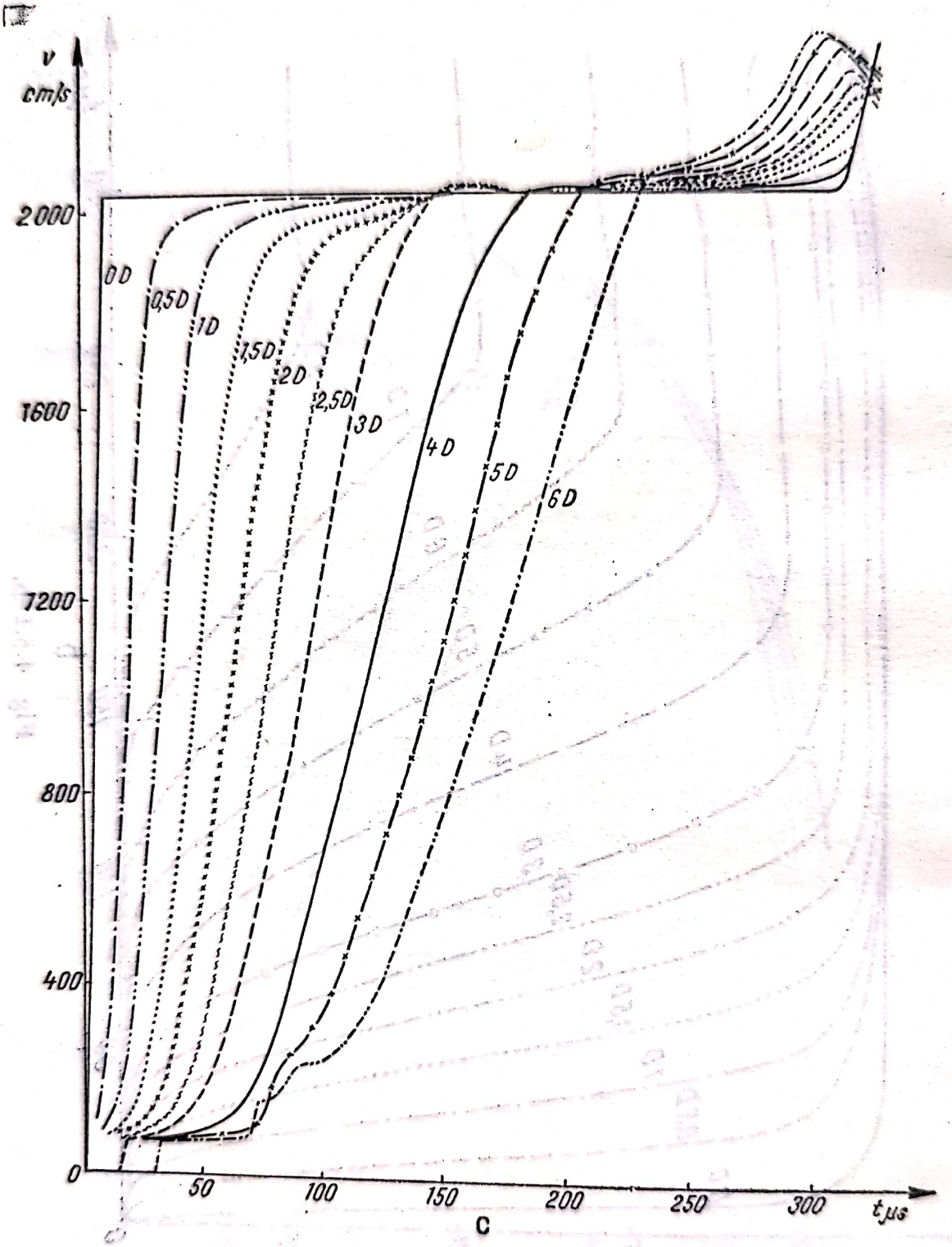


Fig. 4.5.1 c.

Scanned with OKEN Scanner

iar $\sigma = \sigma_R(\varepsilon)$ este curba (sau frontiera) de relaxare și

$$k(\varepsilon) = k_0\left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\hat{\varepsilon}}\right)\right] \tag{4.5.16}$$

cu k_0 și $\hat{\varepsilon}$ constante. Funcția $\Phi(\varepsilon)$ a fost definită pentru partea din proces în care tensiunea crește, astfel

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{3\left[\varepsilon - \varepsilon_Y - \varepsilon^* + \left(\frac{a}{3E}\right)^{3/2}\right]^{2/3}}{a} - \frac{1}{E} \tag{4.5.17}$$

unde

$$a = m + n\sqrt{\varepsilon} \tag{4.5.18}$$

și m, n, ε_Y, ε^* sînt constante.

Cu notațiile de mai sus, condiția (4.5.13) poate fi scrisă astfel

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{E} + \Phi\right)^2}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon}\left(\frac{1}{E} + \Phi\right) - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\Psi}{\partial\sigma}\right] \approx$$

$$\approx \frac{k_0\left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\hat{\varepsilon}}\right)\right]}{[1 + E\Phi]^2}\left[1 - \left(\frac{1}{E} + \Phi\right)\sigma_R'(\varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \frac{2(\sigma - \sigma_R(\varepsilon))}{a\left[\varepsilon - \varepsilon_Y - \varepsilon^* + \left(\frac{a}{3E}\right)^{3/2}\right]^{1/3}}\right] + \tag{4.5.19}$$

$$+ \frac{k_0}{1 + E\Phi}\left[\left(\frac{1}{E} + \Phi\right)\frac{1}{\hat{\varepsilon}}\{\sigma - \sigma_R(\varepsilon)\}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\hat{\varepsilon}}\right) - \right.$$

$$- \left\{1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\hat{\varepsilon}}\right)\right\}\{\sigma -$$

$$\left. - \sigma_R(\varepsilon)\}\frac{3n}{2\sqrt{3Ea\varepsilon}}\frac{1}{\left[\varepsilon - \varepsilon_Y - \varepsilon^* + \left(\frac{a}{3E}\right)^{3/2}\right]^{1/3}}\right].$$

În scrierea membrului drept al lui (4.5.19) unii termeni de mărime mult mai mică au fost neglijați.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în membrul drept din (4.5.19) se face $\varepsilon = \varepsilon_Y$ (începutul deformației plastice), acest termen este pozitiv în timp ce în apropierea valorii maxime a lui Φ același termen este negativ adică această expresie schimbă de semn. Acest rezultat este evident deoarece pentru $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ (deformația în punctul de inflexiune a curbei $\varepsilon - t$ la $X = 0$) termenul $\left(\frac{1}{E} + \Phi\right) \sigma_R'(\varepsilon) \approx 1{,}37$. Condiția este verificată și la $X = 1D$. Toți ceilalți termeni din (4.5.19) sînt la $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ ori negativi ori neglijabili.

Astfel, concluzia principală este că pentru o ecuație constitutivă cvasiliniară de forma (4.5.14), membrul drept din ecuația (4.5.7) poate fi zero pentru un $t_* > 0$ și prin urmare un platou absolut în spațiu și timp este posibil. Cu alte cuvinte, pentru o ecuație constitutivă cvasiliniară poate exista un domeniu în planul caracteristic, unde $v(X, t) = \text{const.}$, $\varepsilon(X, t) = \text{const.}$, și $\sigma(X, t) = \text{const.}$ Exemplele date în fig. 4.5.1 arată că de fapt acest platou există.

Să arătăm acum că modelul semiliniar (4.5.2), cel mai adesea folosit, nu admite un platou absolut pentru nici una din funcțiile v, ε, σ.

Pentru a arăta aceasta, să presupunem că deasupra unei curbe Γ din planul caracteristic avem

$$v = \text{const.}, \qquad \varepsilon = \text{const.} \tag{4.5.20}$$

Atunci din (4.5.20) și (4.5.6) se obține pentru orice punct deasupra lui Γ (cu $\sigma_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 0$)

$$e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t_*} [E - \sigma_R'(\varepsilon(s))] \frac{\partial \varepsilon(s)}{\partial X} e^{k(s-t_0)} \, ds = 0. \tag{4.5.21}$$

Ținînd seama de formule de tipul (4.5.12) și cunoscînd din rezultatele experimentale să α nu poate schimba de semn, se ajunge la concluzia că (4.5.21) este imposibil. Astfel, un platou absolut este imposibil pentru dependența liniară de supratensiune a lui ψ dată de (4.5.2).

Un platou absolut este de asemenea imposibil pentru multe alte forme ale lui ψ propuse în literatură, ca de exemplu

$$\psi = -k\left[\exp\left(\frac{\sigma - \sigma_R(\varepsilon)}{a} - 1\right)\right] \quad \text{sau} \quad \psi = -k(\sigma - \sigma_R(\varepsilon))^{\alpha}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $\alpha \geqslant 1$, cum se poate vedea ușor din condiția (4.5.13) cu $\varphi = E$. Totuși, s-ar putea ca alegînd alte forme pentru funcția ψ, verificînd condițiile teoremei 4.3.3, condiția (4.5.13) să poată fi verificată chiar pentru un model semiliniar.

Afirmația făcută de Suliciu, Malvern și Cristescu [1972] că ecuația constitutivă semiliniară

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + \psi(\varepsilon, \sigma) \tag{4.5.22}$$

cu

$$\psi(\varepsilon, \sigma) = \begin{cases} -k(\sigma - \sigma_R(\varepsilon))^\alpha & \text{pentru} \quad \sigma > \sigma_R(\varepsilon) \\ 0 & \text{pentru} \quad \sigma \leqslant \sigma_R(\varepsilon) \end{cases} \tag{4.5.23}$$

pentru $\sigma \geqslant 0$ și $\varepsilon \geqslant 0$ cu $\alpha = \frac{1}{2}$ nu admite un platou absolut, este falsă. La această concluzie s-a ajuns aplicîndu-se formulele (4.5.7) și (4.5.13). Formula (4.5.7) poate fi aplicată în acest caz numai cînd funcția ψ este de clasă C^1 pe un domeniu $\mathcal{D}$ și are derivatele parțiale mărginite pe $\overline{\mathcal{D}}$ (vezi teorema 4.3.2). Vom arăta (pentru o clasă specială de deformații și anume, deformații de tipul celor ce intervin în lovirea cu viteză finită a unei bare) că formula (4.5.7) poate fi aplicată și că în apropierea capătului lovit (vezi Suliciu [1975 a])

$$0 \leqslant \int_{t_0}^{t} \left[\exp\left(-\int_{t_0}^{s} \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon(s_1), \tau(s_1)) \right) \right] \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \, ds \leqslant \text{const.} \tag{4.5.24}$$

oricare ar fi t, în timp ce

$$\exp\left[\int_{t_0}^{t} \frac{\partial \mu}{\partial \tau}(\varepsilon(s), \tau(s)) \, ds \right] \to 0 \quad \text{cînd} \quad t \to \tilde{t}_* < \infty \tag{4.5.25}$$

ceea ce va duce la concluzia că un platou absolut în toate trei variabilele ε, v, σ este posibil.

Vom alege domeniul $\mathcal{D}$ astfel: $\mathcal{D} = \{(\varepsilon, \sigma);\ \sigma > f(\varepsilon), \varepsilon > 0, \sigma > 0\}$. Deoarece în apropierea capătului lovit se înregistrează un salt în deformație $\varepsilon_i > \varepsilon_Y$ și deoarece tensiunea corespunzătoare este pe curba instantanee (în acest caz pe curba lui Hooke), avem $\sigma_i = E\varepsilon_i > \sigma_R(\varepsilon_i)$. Prin

Scanned with OKEN Scanner

urmare în formula (4.3.10) ψ este calculat în punctul $(\varepsilon_i, \sigma_i) \in$ $\in \mathcal{D}$ la $t = t_0$ cu $\tau(t_0) = 0$ (și evident $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 1$) și formula (4.5.7) rămîne valabilă atît timp cît $(\varepsilon(t), \sigma(t) = E\varepsilon(t) + \tau(t)) \in \mathcal{D}$.

Vom arăta acum că dacă ε își atinge un platou deasupra unei curbe Γ din planul caracteristic, atunci există o curbă Γ^* deasupra lui Γ unde v și σ ating și ele un platou.

Demonstrația faptelor descrise mai sus se bazează pe propoziția care urmează.

Propoziția 4.5.1: Problema inițială

$$\dot{\tau} = -k(\tau + \Omega)^\alpha, \qquad \tau(t_0) = 0 \tag{4.5.26}$$

cu $\alpha \in (0, 1)$ și $\Omega : [t_0, \infty) \to R$, $\Omega \in C^1$, $\Omega(t_0) = \Omega_0 > 0$, $\Omega(t) > 0$ pentru $t \in [t_0, \infty)$, $\dot{\Omega}(t) > 0$ pentru $t \in (t_0, t_*)$, $\dot{\Omega}(t) = 0$ pentru $t \in [t_*, \infty)$ admite o soluție unică de clasă $C^1[t_0, \infty)$ (vezi de exemplu Hartman [1964] Cap. III, §6). Soluția problemei (4.5.26) are următoarele proprietăți: dacă

$$t_0 < t_* < \frac{\Omega_*^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)} \tag{4.5.27}$$

unde $\Omega_* = \Omega(t_*)$ atunci există $\tilde{t}_* > t_*$ astfel încît

$$\tau(t) + \Omega(t) > 0 \quad \text{pentru toți} \quad t \in [t_0, \tilde{t}_*], \tag{4.5.28}$$

pe intervalul $[t_*, \infty)$ soluția problemei (4.5.26) are următoarea formă

$$\tau(t) = \begin{cases} -\Omega_* + [(\tau_* + \Omega_*)^{1-\alpha} - k(1-\alpha)(t - t_*)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ \qquad\qquad t \in [t_*, \tilde{t}_*] \\ -\Omega_*, \qquad \tilde{t}_* \leqslant t \end{cases} \tag{4.5.29}$$

obținută prin integrarea directă a ecuației (4.5.26) pe intervalul $[t_*, \infty)$ cu $\tau(t_*) = \tau_*$.

Pentru a demonstra afirmațiile (4.5.28) și (4.5.29) procedăm astfel: notăm că

$$\Omega_* = \Omega(t_*) \geqslant \Omega(t), \qquad t \in [t_0, \infty)$$

Scanned with OKEN Scanner

și avem

$$-k(\tau + \Omega)^{\alpha} \geqslant -k(\tau + \Omega_*)^{\alpha}, \qquad t \in [t_0, \infty). \tag{4.5.30}$$

Atunci avem (vezi de exemplu Hartman [1964], Cap. III, §4)

$$\tau(t) \geqslant \tau_0(t), \qquad t \in [t_0, \infty) \tag{4.5.31}$$

unde $\tau(t)$ este soluție a problemei (4.5.26) iar $\tau_0(t)$ este soluție a problemei

$$\dot{\tau}_0 = -k(\tau_0 + \Omega_*)^{\alpha}, \qquad \tau_0(t_0) = 0 \tag{4.5.32}$$

și are următoarea expresie

$$\tau_0(t) = \begin{cases} -\Omega_* + [\Omega_*^{1-\alpha} - k(1-\alpha)(t-t_0)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ \qquad\qquad t \in \left[t_0, \dfrac{\Omega_*^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}\right], \\ -\Omega_*, \qquad \dfrac{\Omega_*^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)} < t. \end{cases} \tag{4.5.33}$$

Din (4.5.31) și (4.5.33) găsim că

$$\tau(t) > -\Omega_* \quad \text{pentru} \quad t \in [t_*, \tilde{t}_*) \tag{4.5.34}$$

unde

$$\tilde{t}_* = t_* + \frac{[\tau(t_*) + \Omega_*]^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)} \tag{4.5.35}$$

și astfel (4.5.28) și (4.5.29) urmează. Vom alege $\Omega = E\varepsilon - \sigma_R(\varepsilon)$ și deoarece $\sigma = f(\varepsilon, \tau) = E\varepsilon + \tau$, avem

$$\mu(\varepsilon, \tau) = \psi(\varepsilon, \tau + E\varepsilon)$$

și din (4.5.8) și (4.5.23) obținem

$$\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = -k\alpha \frac{E - \sigma_R'(\varepsilon)}{(E\varepsilon - \sigma_R(\varepsilon) + \tau)^{1-\alpha}}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = -\frac{k\alpha}{(E\varepsilon - \sigma_R(\varepsilon) + \tau)^{1-\alpha}}. \tag{4.5.36}$$

Acum deoarece deasupra unei curbe Γ s-a presupus că ε și-a atins un platou absolut în timp și spațiu, adică pentru $t > t_* = g(X_*)$, $(X_*, t_*) \in \Gamma$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial X}(X_*, t) = 0$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(X_*, t) = 0$ iar din (4.5.28) urmează că $(\varepsilon(t_*), \sigma(t_*)) \in \mathcal{D}$ (adică

Scanned with OKEN Scanner

acest punct nu se află pe curba de relaxare) deci $\frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon}$ și $\frac{\partial \mu}{\partial \tau}$ sînt finiți și de aici (4.5.24) urmează deoarece integrala rămîne constantă pentru $t \geqslant t_*$.

Din (4.5.29) și $(4.5.36)_2$ obținem

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = - \frac{k\alpha}{(\tau_* + \Omega_*)^{1-\alpha} - k(1-\alpha)\,(t-t_*)}, \quad t \in [t_*, \tilde{t}_*)$$

și putem scrie

$$\exp\left[\int_{t_0}^{t} \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\, ds\right] =$$

$$= \left[\exp\left(\int_0^t \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\, ds\right)\right] \frac{1}{(\tau_* + \Omega_*)^{\alpha}} [(\tau_* + \Omega_*)^{1-\alpha} - k(1-\alpha)\,(t-t_*)]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

pentru toți $t \in [t_*, \tilde{t}_*)$. De aici și din (4.5.35) urmează (4.5.25) și prin urmare pentru $t \geqslant \tilde{t}_*$ apare un platou și pentru tensiuni și viteze.

Deoarece în formula (4.5.21) apare o exponențială negativă în fața acoladei din membrul drept, s-ar părea că în (4.5.21) zeroul ar putea fi atins asimptotic pentru $t \gg t_*$. Vom arăta acum că folosind un model semiliniar (4.5.2), ecuațiile de mișcare nu pot fi satisfăcute peste tot în planul (X, t) dacă se presupune că una din funcțiile σ, v, ε este constantă în timp ce celelalte două tind asimptotic către un platou.

Să presupunem că deasupra unei curbe Γ din planul caracteristic, una din funcțiile necunoscute să zicem v, este o constantă (în timp și spațiu). Pentru acest caz, să examinăm în ce condiții o altă funcție, să zicem ε, ar putea atinge un platou într-o manieră asimptotică. Dacă

$$v = \text{const. deasupra lui } \Gamma \tag{4.5.37}$$

atunci din $(4.5.1)_2$ rezultă că

$$\varepsilon = h(X). \tag{4.5.38}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd prin (X_*, t_*) coordonatele punctelor de pe Γ, și integrînd în (4.5.6) pînă la un $t > t_*$ obținem

$$0 = -\sigma_R(\varepsilon(t_*, X_*))\frac{\partial\varepsilon(t_*, X_*)}{\partial X} + k\exp(-k(t-t_0))\times$$

$$\times\left\{\int_{t_0}^{t}\left[E - \sigma_R'(\varepsilon(s, X_*))\right]\frac{\partial\varepsilon(s, X_*)}{\partial X}\exp(k(s-t_0))\,ds - \right. \tag{4.5.39}$$

$$\left.\frac{1}{k}\left[E - \sigma_R'(\varepsilon(t_*, X_*))\right]\frac{\partial\varepsilon(t_*, X_*)}{\partial X}\exp(k(t_*-t_0))\right\}.$$

Această identitate este de forma $a + b\exp(-k(t-t_0)) = 0$ cu $a = \text{const.}$ și $b = \text{const.}$ Vom vedea că această identitate nu poate fi satisfăcută în general nici exact nici asimptotic.

Pentru ca (4.5.39) să fie satisfăcută exact, trebuie să avem

$$\sigma_R'\frac{\partial\varepsilon}{\partial X} = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_*}\left[E - \sigma_R'(\varepsilon(s, X_*))\right]\frac{\partial\varepsilon(s, X_*)}{\partial X}\exp(k(s-t_0))\,ds - \tag{4.5.40}$$

$$-\frac{1}{k}\left[E - \sigma_R'(\varepsilon(t_*, X_*))\right]\frac{\partial\varepsilon(t_*, X_*)}{\partial X}\exp(k(t_*-t_0)) = 0.$$

Ecuațiile (4.5.40) sînt satisfăcute numai în cazuri foarte particulare. În primul rînd $(4.5.40)_1$ este satisfăcută dacă $\sigma_R'(\varepsilon(t_*, X_*)) = 0$ și atunci din $(4.5.40)_2$ rezultă

$$k\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\varepsilon(s, X_*)}{\partial X}\exp(k(s-t_0))\,ds = \frac{\partial\varepsilon(t_*, X_*)}{\partial X}\exp(k(t_*-t_0)).$$

Adică (4.5.40) este satisfăcută numai dacă nu avem ecruisare și dacă este impusă o lege de variație a deformației foarte particulară.

Scanned with OKEN Scanner

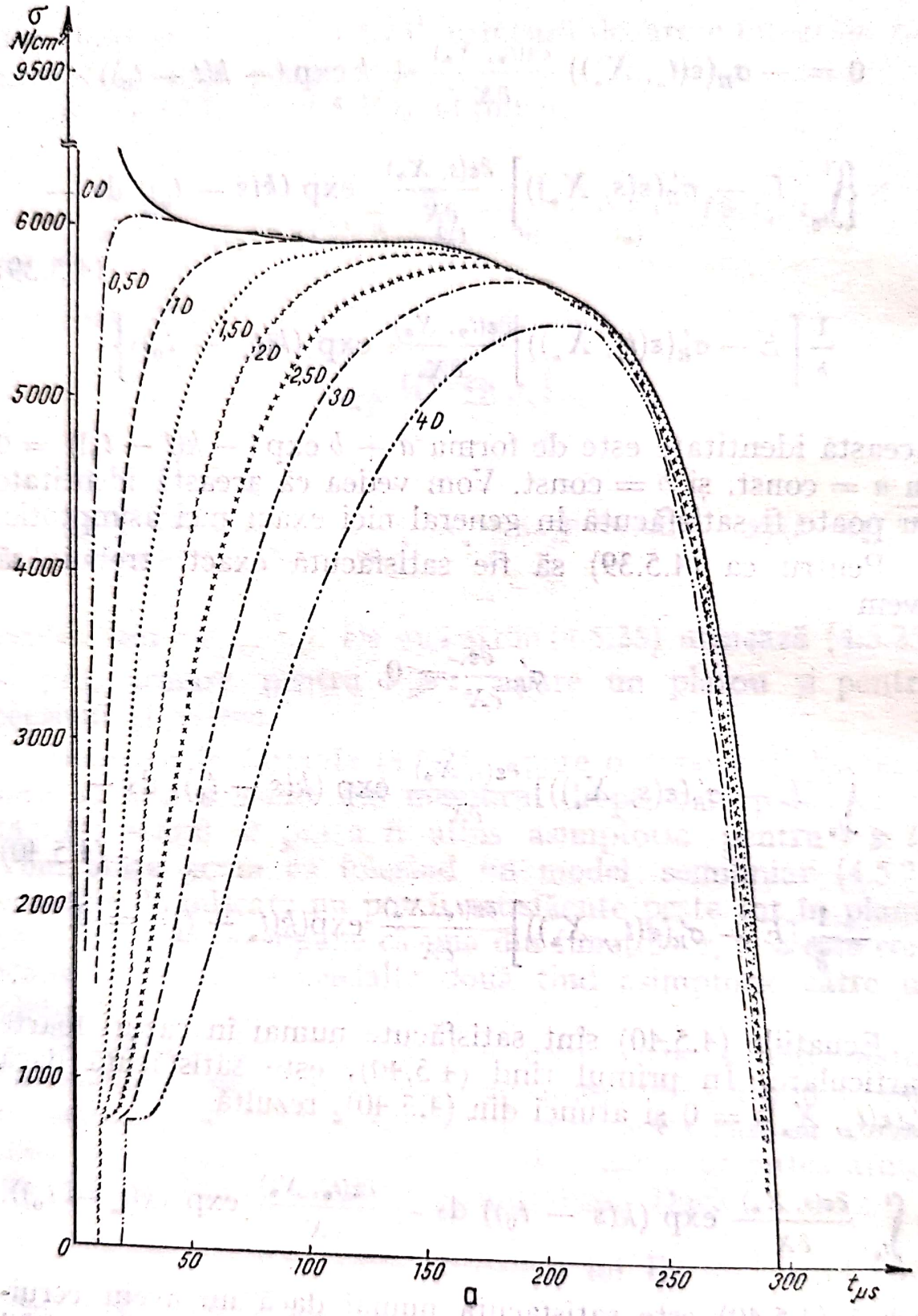


Fig. 4.5.2 a

Scanned with OKEN Scanner

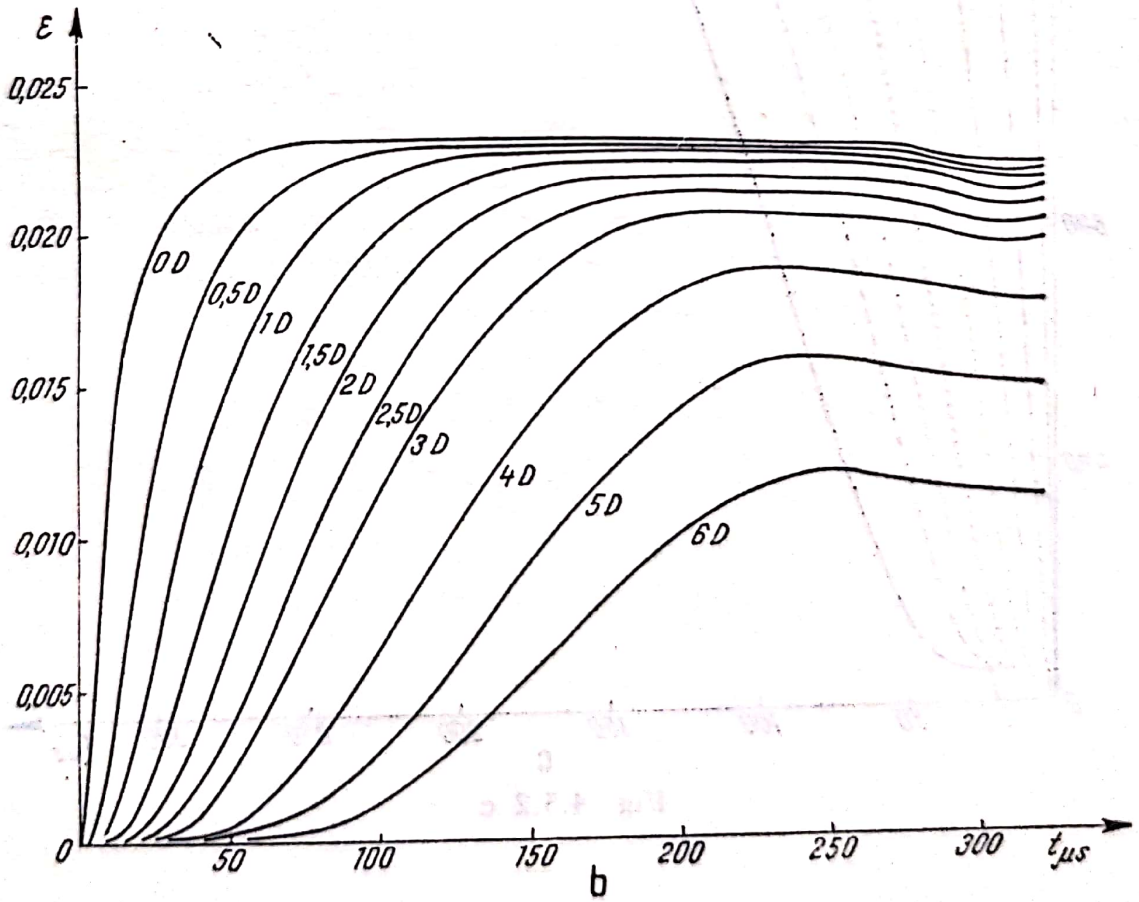
În al doilea rînd, $(4.5.40)_1$ este satisfăcută de asemenea dacă $\partial\varepsilon(t_*, X_*)/\partial X = 0$, adică

$$\int_{t_0}^{t_*} [E - \sigma_R'(\varepsilon(s, X_*))] \frac{\partial \varepsilon\ (s,\ X_*)}{\partial X} \exp\ (k(s - t_0))\ ds = 0$$

care este imposibil (vezi (4.5.21)).

Pentru a satisface (4.5.39) asimptotic, $(4.5.40)_1$ trebuie să fie satisfăcut (în condițiile particulare deja discutate) și în același timp trebuie găsită o valoare mare a lui t, să zicem $\tilde{t}_*$, de la care (4.5.21) să fie neglijabil (în raport cu precizia cerută pentru determinarea funcțiilor necunoscute). Dar atunci se observă că în banda $(t_*, \tilde{t}_*)$ ecuațiile de mișcare nu sînt satisfăcute.

Prin urmare presupunerea că există un platou absolut pentru una din funcțiile v, ε sau σ (presupunerea (4.5.37)) este incompatibilă cu un model semiliniar (pentru care ψ este continuu și are derivate parțiale mărginite pe dome-



b

Fig. 4.5.2 b

Scanned with OKEN Scanner

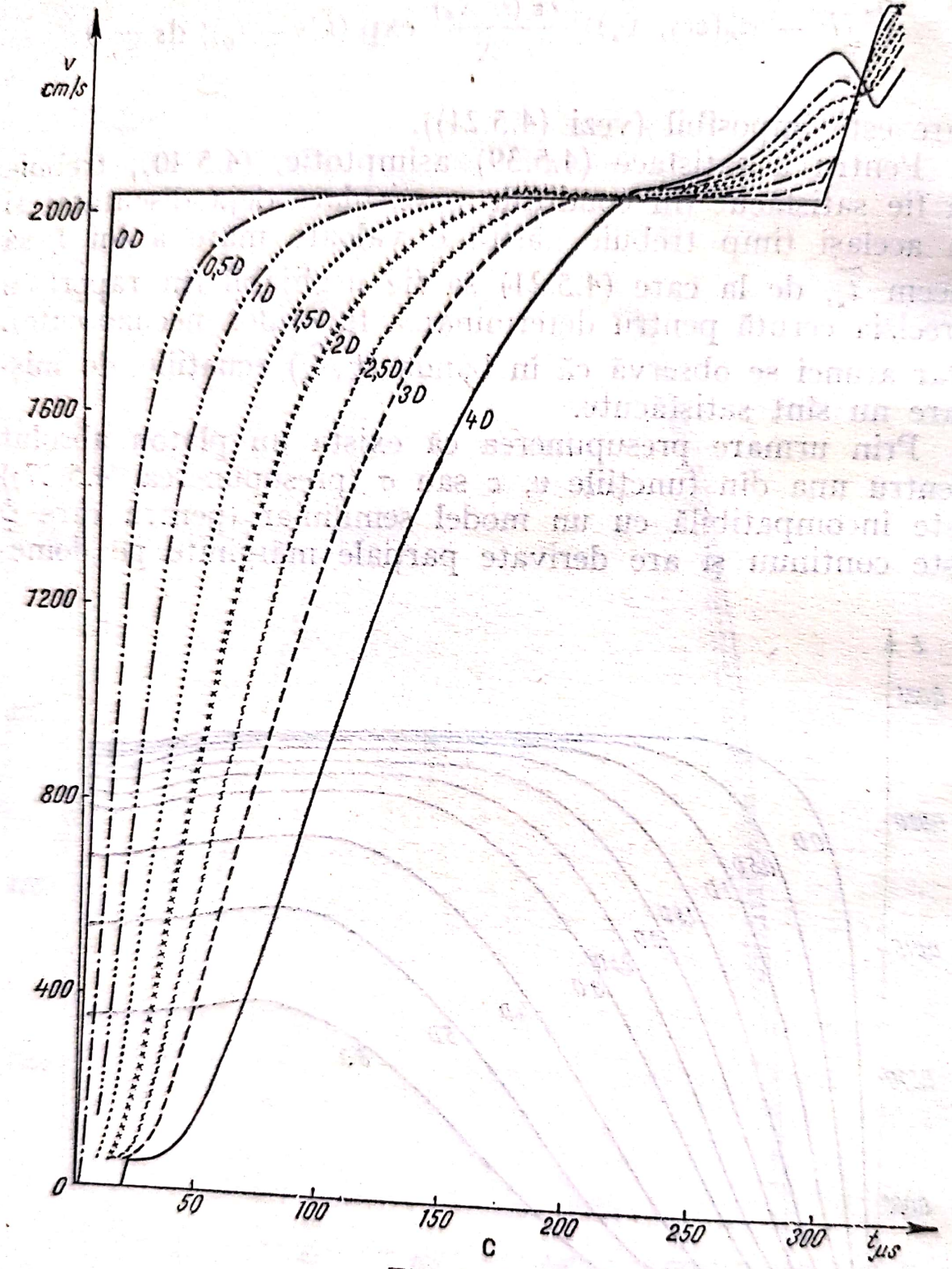


Fig. 4.5.2 c

Scanned with OKEN Scanner

niul său de definiție) dacă nu este satisfăcută cel puțin condiția necesară (4.5.13). (O discuție similară se poate face dacă se presupune că ε sau σ este constant).

Figurile 4.5.2, a, b, c arată că pentru un model semiliniar, cu ψ de forma (4.5.2), deși se pot vedea platouri aproape orizontale, acestea cresc sau descresc foarte încet. Figurile 4.5.1 a, b, c pentru un model cvasiliniar arată o aproximare mult mai bună a unui platou absolut, în primii doi diametri în apropierea capătului lovit.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

Descrierea comportării neelastice cu ajutorul variabilelor interne de stare

§1. Restricții termodinamice asupra ecuațiilor constitutive pentru materiale cu variabile interne de stare

În acest paragraf vor fi prezentate rezultatele lui Coleman și Gurtin [1967] în legătură cu restricțiile impuse de inegalitatea lui Clausius-Duhem asupra răspunsului materialului cu variabile interne de stare.

1.a. **Procese termodinamice și ecuații constitutive.** Considerăm un corp material $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$ o configurație de referință a sa și I un interval real. Funcțiile

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \quad e = e(\mathbf{X}, t) \\ &\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{X}, t), \quad r = r(\mathbf{X}, t), \quad \eta = \eta(\mathbf{X}, t), \quad \theta = \theta(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

(pentru interpretarea lor fizică, vezi Anexa 3) și vectorul variabilelor interne de stare

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}, t) = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^N) \tag{5.1.2}$$

definite pentru orice $(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{R} \times I$, formează un proces termodinamic pentru corpul $\mathcal{B}$ dacă ele sînt compatibile cu ecuația de conservare a impulsului (A3.9) și cu ecuația de conservare a energiei (A 3.10).

Scanned with OKEN Scanner

În cadrul acestei teorii se fac următoarele ipoteze constitutive

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.1.3}$$

$$\eta = \hat{\eta}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.1.4}$$

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.1.5}$$

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.1.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{f}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.1.7}$$

unde $\mathbf{F} = \operatorname{grad}_{\mathbf{X}} \chi$, $\mathbf{g} = \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \theta$, $\mathbf{S}$ este tensorul tensiune al lui Piola-Kirchhoff, $\psi = e - \eta\theta$ (vezi Anexa 3).

Ecuațiile (5.1.3)—(5.1.6) spun că energia liberă specifică ψ, entropia specifică η, tensiunea $\mathbf{S}$ și fluxul de căldură $\mathbf{q}$ într-un punct $\mathbf{X}$ al configurației de referință $\mathcal{R}$ la un moment $t \in I$ sînt determinate dacă se cunosc valorile gradientului deformației $\mathbf{F}$, a temperaturii absolute θ, a gradientului temperaturii $\mathbf{g}$ și a vectorului $\boldsymbol{\alpha}$ al variabilelor interne de stare în punctul $(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{R} \times I$. Ecuația (5.1.7) se numește ecuația de evoluție a variabilelor interne de stare. Această ecuație ne spune că dacă $\mathbf{f}$ este suficient de netedă în raport cu argumentele sale și dacă pentru un $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ fixat $\mathbf{F}$, θ și $\mathbf{g}$ sînt date ca funcții riglate de $t \in I$ (pentru noțiunea de funcție riglată vezi Cap. IV, § 3) atunci cunoașterea valorilor variabilelor interne $\boldsymbol{\alpha}$ la un moment $t_0 \in I$ ne permite determinarea unică a tuturor valorilor $\boldsymbol{\alpha}(t)$ pentru $t \in I$. $\boldsymbol{\alpha}$ ca funcție de $t \in I$ aparține clasei C_{I}^{01}, adică α_i sînt funcții continue de t și au derivate laterale funcții riglate de t. De aceea dacă la un moment dat $t \in I$, $\mathbf{F}$, θ și $\mathbf{g}$ au salturi, acestea vor implica salturi în ψ, η, $\mathbf{S}$, $\mathbf{q}$ și $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ în timp ce $\boldsymbol{\alpha}$ la momentul t rămîne continuu.

Un proces termodinamic se numește proces termodinamic admisibil, pentru corpul $\mathcal{B}$, dacă el este compatibil cu ecuațiile constitutive (5.1.3)—(5.1.7).

Este evident că ecuațiile constitutive (5.1.3)—(5.1.7) depind de configurația $\mathcal{R}$ aleasă. De exemplu dacă corpul este neomogen atunci în aceste ecuații $\mathbf{X}$ trebuie să intre explicit. Deoarece restricțiile termodinamice se vor da pentru $\mathbf{X}$ fixat, această dependență nu a mai fost menționată explicit.

Scanned with OKEN Scanner

1.b. **Consecințe ale legii a doua a termodinamicii.** Vom adopta aici punctul de vedere al lui Coleman și Noll [1963] în ce privește legătura dintre ecuațiile constitutive și legile generale ale termodinamicii.

Prima observație fundamentală este că funcțiile $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$, $e = e(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{X}, t)$, $\eta = \eta(\mathbf{X}, t)$, $\theta = \theta(\mathbf{X}, t)$ și $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}, t)$ oricare ar fi $(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{R} \times I$, pot fi date arbitrar și se obține un proces termodinamic prin determinarea lui $\mathbf{b}$ și r din ecuațiile (A3.9) și (A3.10).

O altă observație fundamentală constă din modul cum este înțeleasă inegalitatea lui Clausius-Duhem (A3.16). Pentru materiale cu variabile interne de stare Coleman și Gurtin [1967] dau următorul postulat al pozitivității producției de entropie:

Orice proces termodinamic admisibil pentru $\mathcal{B}$ trebuie să satisfacă inegalitatea (A3.16), adică

$$\theta\gamma = -\dot{\psi} - \eta\dot{\theta} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{F}} - (\rho\theta)^{-1}\mathbf{q}\mathbf{g} \geqslant 0 \qquad (5.1.8)$$

oricare ar fi $(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{R} \times I$.

Pentru prescurtarea scrierii, în acest capitol, produsul a două aplicații liniare (respectiv a două matrice) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ va fi notat cu $\mathbf{A}*\mathbf{B}$. Notațiile din inegalitatea (5.1.8) și cele din Anexa 3 sînt legate astfel

$$\mathbf{S}\dot{\mathbf{F}} = S^{ij}\dot{F}^{ij} = \operatorname{tr}(\mathbf{S}*\dot{\mathbf{F}}^T), \quad \mathbf{q}\mathbf{g} = q^i g^i = \mathbf{q}\cdot\mathbf{g}. \qquad (5.1.9)$$

În acest paragraf se va presupune că $\hat{\psi}$ este de clasă C^1 iar $\hat{\mathbf{S}}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\mathbf{q}}$ și $\mathbf{f}$ sînt de clasă C^0 cu condiția suplimentară asupra lui $\mathbf{f}$ ca orice problemă inițială formulată pentru ecuația (5.1.7) să aibă soluție unică.

Vom trece acum la stabilitatea restricțiilor impuse de (5.1.8) asupra ecuațiilor constitutive (5.1.3)—(5.1.7) (vezi Coleman și Gurtin [1967]). Din (5.1.3) prin derivare avem pentru orice proces termodinamic admisibil

$$\dot{\psi} = \hat{\psi}_{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{F}} + \hat{\psi}_\theta\dot{\theta} + \hat{\psi}_{\mathbf{g}}\dot{\mathbf{g}} + \hat{\psi}_\alpha\dot{\boldsymbol{\alpha}}. \qquad (5.1.10)$$

Aici și în continuare în acest capitol, printr-un indice inferior la o funcție se va înțelege derivata parțială a funcției respective în raport cu acel indice.

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd (5.1.10) în (5.1.8) obținem

$$\theta\gamma = (\hat{\mathbf{S}} - \hat{\psi}_{\mathbf{F}})\,\dot{\mathbf{F}} - (\hat{\psi}_{\theta} + \hat{\eta})\,\dot{\theta} - \hat{\psi}_{\mathbf{g}}\dot{\mathbf{g}} - \hat{\psi}_{a}\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \\ - (\rho\theta)^{-1}\mathbf{g}\mathbf{q} \geqslant 0. \tag{5.1.11}$$

Fie acum $(\mathbf{F}^0, \theta^0, \mathbf{g}^0, \boldsymbol{\alpha}^0)$ un punct arbitrar din domeniul de definiție al funcțiilor $\hat{\psi}, \hat{\eta}, \hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{f}$ și fie $(\mathbf{X}^0, t^0) \in \mathcal{R} \times I$. Alegem arbitrar un tensor $\mathbf{A}$, un vector $\mathbf{a}$ și un scalar a, atunci

$$\chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}^0 + [\mathbf{F}^0 + (t - t^0)\,\mathbf{A}] * [\mathbf{X} - \mathbf{X}^0] \\ \theta(\mathbf{X}, t) = \theta^0 + (t - t^0)\,a + [\mathbf{g}^0 + (t - t^0)\,\mathbf{a}]\,\mathbf{F}^0 * [\mathbf{X} - \mathbf{X}^0] \tag{5.1.12}$$

reprezintă o mișcare și un cîmp de temperatură pentru toți $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ și pentru toți $t \in I$, $t \geqslant t^0$ și t suficient de aproape de t^0. (Aici $\mathbf{a}\mathbf{F}^0 * [\mathbf{X} - \mathbf{X}^0] = a^i F^{0ij}(X^j - X^{0j})$ etc.). Acum cu $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}, t^0) = \boldsymbol{\alpha}^0$, ecuația de evoluție (5.1.7) împreună cu (5.1.12) determină $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}, \tau)$ pentru orice $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ și orice $\tau \in [t^0, t]$ (pentru t suficient de aproape de t^0). Cu $\boldsymbol{\alpha}$ astfel determinat construim $\psi, \eta, e = \psi + \theta\eta$, $\mathbf{S}$ și $\mathbf{q}$ pentru toți $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ și $\tau \in [t^0, t]$ iar apoi cu ajutorul ecuațiilor (A3.9) și (A3.10) determinăm $\mathbf{b}(\mathbf{X}, \tau)$, $r(\mathbf{X}, \tau)$. În felul acesta am obținut un proces termodinamic admisibil. Acest proces are următoarele proprietăți

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^0, t^0) = \mathbf{F}^0, \quad \theta(\mathbf{X}^0, t^0) = \theta^0 \\ \mathbf{g}(\mathbf{X}^0, t^0) = \mathbf{g}^0, \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}^0, t^0) = \boldsymbol{\alpha}^0 \tag{5.1.13}$$

și

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}^0, t^0) = \mathbf{A}, \quad \dot{\theta}(\mathbf{X}^0, t^0) = a, \quad \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{X}^0, t^0) = \mathbf{a} \tag{5.1.14}$$

Prin urmare pentru acest proces inegalitatea (5.1.11) în punctul $(\mathbf{X}^0, t^0)$ se scrie

$$\theta^0\gamma = [\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}^0, \theta^0, \mathbf{g}^0, \boldsymbol{\alpha}^0) - \hat{\psi}_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}^0, \theta^0, \mathbf{g}^0, \boldsymbol{\alpha}^0)]\,\mathbf{A} - \\ - [\hat{\psi}_{\theta}(\mathbf{F}^0, \theta^0, \mathbf{g}^0, \boldsymbol{\alpha}^0) + \hat{\eta}(\mathbf{F}^0, \theta^0, \mathbf{g}^0, \boldsymbol{\alpha}^0)]\,a - \\ - \hat{\psi}_{\mathbf{g}}(\mathbf{F}^0, \theta^0, \mathbf{g}^0, \boldsymbol{\alpha}^0)\,\mathbf{a} - \hat{\psi}_{a}(\mathbf{F}^0, \theta^0, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha}^0)\,\mathbf{f}(\mathbf{F}_0, \theta^0, \mathbf{g}^0, \boldsymbol{\alpha}^0) - \\ - (\rho^0\theta^0)^{-1}\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}^0, \theta^0, \mathbf{g}^0, \boldsymbol{\alpha}^0)\,\mathbf{g}^0 \geqslant 0 \tag{5.1.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\rho^0 = \rho^{\mathcal{R}}/(\det \mathbf{F}^0)$ (vezi A3.11)). Din (5.1.15) deoarece **A**, **a** și a sînt arbitrare, urmează că

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\psi}_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.1.16}$$

$$\hat{\eta}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = -\hat{\psi}_{\theta}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.1.17}$$

$$\hat{\psi}_{\mathbf{g}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \tag{5.1.18}$$

$$-\theta\gamma = \hat{\psi}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{f}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) + \\ + (\rho\theta)^{-1}\, \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{g} \leqslant 0. \tag{5.1.19}$$

Indicele „o" pentru punctul $(\mathbf{F}^0, \theta^0, \mathbf{g}^0, \boldsymbol{\alpha}^0)$ a fost omis deoarece acest punct a fost ales arbitrar în domeniul de definiție al funcțiilor respective.

Prin urmare avem următoarele consecințe ale postulatului pozitivității producției de entropie (vezi Coleman și Gurtin [1967], Onat [1968], Valanis [1968]):

(i) Funcțiile de răspuns $\hat{\psi}$, $\hat{\eta}$ și $\hat{\mathbf{S}}$ sînt independente de $\mathbf{g}$; adică ψ, η și $\mathbf{S}$ sînt determinate de funcții ce depind numai de $\mathbf{F}$, θ și $\boldsymbol{\alpha}$,

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad \eta = \hat{\eta}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.1.20}$$

(ii) $\hat{\psi}$ determină pe $\hat{\eta}$ prin relația entropiei (5.1.17) iar pe $\hat{\mathbf{S}}$ prin relația tensiunii (5.1.16), adică

$$\eta = -\hat{\psi}_{\theta}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{S} = \hat{\psi}_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.1.21}$$

(iii) $\hat{\psi}$, $\mathbf{f}$ și $\hat{\mathbf{q}}$ sînt supuse inegalității generale de disipație (5.1.19) adică

$$-\theta\gamma = \hat{\psi}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{f}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) + \\ + (\rho\theta)^{-1}\, \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{g} \leqslant 0. \tag{5.1.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

Invers, dacă condițiile (i)—(iii) sînt satisfăcute atunci inegalitatea (5.1.11) este satisfăcută de către orice proces admisibil pentru $\mathcal{B}$.

Din $(5.1.21)_2$ și (A3.11) urmează că tensorul simetric al lui Cauchy este dat de relația

$$\mathbf{T} = \rho\hat{\psi}_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) * \mathbf{F}^T \tag{5.1.23}$$

Se observă că în inegalitatea (5.1.22) intervin două tipuri de disipație: $\hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{f}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \sigma$ numită disipație internă și $(\rho\theta)^{-1}\, \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{g} = \omega$ numită disipație prin conducție de căldură. Se vede că $\sigma + \omega \leqslant 0$ dar în general nu avem $\sigma \leqslant 0$ și $\omega \leqslant 0$.

§2. Restricții termodinamice asupra părții disipative a ecuațiilor constitutive

Pentru o scriere mai condensată introducem următoarele notații

$$\mathbf{M} = (\mathbf{F}, \theta) \in \mathcal{L}^+ \times R^+; \quad \mathbf{G} = (\mathbf{M}, \mathbf{g}) \in \mathcal{L}^+ \times R^+ \times R^3$$
$$\mathbf{H} = (\mathbf{G}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{L}^+ \times R^+ \times R^3 \times R^N \tag{5.2.1}$$

unde $\mathcal{L}^+$ este mulțimea tuturor matricelor trei pe trei cu determinant pozitiv, R^+ este mulțimea tuturor numerelor reale și pozitive, iar $\mathcal{L}$ va fi mulțimea tuturor matricelor trei pe trei.

O stare termodinamică $\mathbf{H}^* = (\mathbf{F}^*, \theta^*, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}^*)$ se numește stare de echilibru dacă

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}(\mathbf{H}^*) = \mathbf{0} \tag{5.2.2}$$

și această stare se numește stare de echilibru tare dacă în plus

$$\psi_{\alpha}^* = \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{H}^*) = \mathbf{0}. \tag{5.2.3}$$

Aici și în continuare, prin steluță ca indice superior la o funcție se va înțelege valoarea acelei funcții calculată la o stare de echilibru.

Scanned with OKEN Scanner

Bowen [1968] a observat că funcția Γ definită cu ajutorul expresiei (5.1.22) astfel

$$\Gamma(\mathbf{H}) = \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{f}(\mathbf{H}) + (\rho\theta)^{-1}\, \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{H})\, \mathbf{g} \leqslant 0 \qquad (5.2.4)$$

are un maxim pentru $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$, ceea ce ne permite să scriem, pentru $\mathbf{H}^*$ punct interior domeniului $\mathcal{D}$ de definiție al funcțiilor $\hat{\psi}$, $\mathbf{f}$ și $\hat{\mathbf{q}}$,

$$\Gamma^* = \Gamma(\mathbf{H}^*) = 0 \qquad (5.2.5)$$

$$\Gamma^*_{\mathbf{H}} = \Gamma_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^*) = \mathbf{0} \qquad (5.2.6)$$

$$\Gamma^*_{\mathbf{H}^2}[\overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{H}}] = \Gamma_{\mathbf{H}^2}(\mathbf{H}^*)\,[\overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{H}}] \leqslant 0. \qquad (5.2.7)$$

În acest paragraf se presupune că $\hat{\psi}$ este de clasă C^3 iar $\mathbf{f}$ și $\hat{\mathbf{q}}$ de clasă C^2.

Inegalitatea (5.2.7) trebuie să aibă loc pentru toți $\overline{\mathbf{H}} \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times R \times R^3 \times R^N$, ceea ce înseamnă că forma pătratică $\Gamma^*_{\mathbf{H}^2}[\overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{H}}]$ trebuie să fie negativ semidefinită.

Condiția (5.2.6) scrisă pe componentele lui $\mathbf{H}$ ne spune că trebuie să avem

$$\psi^*_\alpha \mathbf{f}^*_\alpha = \mathbf{0} \qquad (5.2.8)$$

$$\psi^*_\alpha \mathbf{f}^*_M = \mathbf{0} \qquad (5.2.9)$$

$$\psi^*_\alpha \mathbf{f}^*_\alpha + (\rho^*\theta^*)^{-1}\mathbf{q}^* = \mathbf{0}. \qquad (5.2.10)$$

După cum se știe $\mathbf{f}^*_\alpha$ este o aplicație liniară de la R^N la R^N. Dacă această aplicație are determinantul diferit de zero atunci înseamnă că $\psi^*_\alpha = \mathbf{0}$, adică

$$\det \mathbf{f}^*_\alpha \neq 0 \qquad (5.2.11)$$

implică faptul că (5.2.3) este satisfăcută

Am obținut astfel următorul rezultat (Bowen [1968]): Dacă la o stare de echilibru $\mathbf{H} = \mathbf{H}^* = (\mathbf{F}^*, \theta^*, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}^*)$ funcția $\mathbf{f}$ de evoluție a parametrilor interni din (5.1.7) este nedegenerată atunci acea stare de echilibru este o stare de echi-

libru tare (vezi și Truesdell [1969]) și (5.2.3) împreună cu (5.2.10) implică

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{0} \tag{5.2.12}$$

adică la o stare de echilibru tare fluxul de căldură se anulează.

Egalitatea (5.2.3) (deci și (5.2.12)) are loc chiar dacă (5.2.11) nu este satisfăcută dar acoperirea liniară în R^N a lui $f_{\alpha}^*(R^N)$ și $\mathbf{f}_{\mathbf{M}}^*(\mathcal{L}\times R)$ este egală cu R^N. Egalitățile (5.2.8) și (5.2.9) fără ipoteze suplimentare nu implică totuși că o stare de echilibru este o stare de echilibru tare. De asemenea nu se poate conclude pe baza lui (5.2.8)—(5.2.9) că fluxul de căldură $\mathbf{q}$ se anulează la o stare de echilibru; aceasta se întîmplă dacă și numai dacă $\psi_{\alpha}^*\mathbf{f}_{\mathbf{g}}^* = \mathbf{0}$.

La concluzia $\psi_{\alpha}^* = \mathbf{0}$ au ajuns și Coleman și Gurtin [1967] făcînd ipoteza că starea de echilibru este o stare asimptotic stabilă în sensul lor. Același rezultat se obține aici numai din condiția ca funcția $\mathbf{f}$ să depindă destul de efectiv de $\mathbf{F}$, θ și $\boldsymbol{\alpha}$.

Presupunem că există o stare de echilibru $\mathbf{H}^* = (\mathbf{M}^*, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}^*) \in \mathcal{D}$ și că (5.2.11) este satisfăcută în acest punct; atunci din teorema de funcții implicite urmează că există o vecinătate $U^* \subset \mathcal{L}^+ \times R^+ \times R^N$ a lui $(\mathbf{M}^*, \boldsymbol{\alpha}^*)$ și o funcție $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}(\mathbf{M})$ continuă și diferențiabilă astfel încît

$$\mathbf{f}(\mathbf{M}, \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{M})) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\alpha}^* = \mathbf{h}(\mathbf{M}^*) \tag{5.2.13}$$

și această vecinătate U^* este astfel încît condiția (5.2.11) este satisfăcută în toate punctele sale. Aceasta înseamnă că toate punctele $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{h}(\mathbf{M}))$ din U^* sînt puncte de echilibru tare (adică puncte în care (5.3.2) are loc). Cu ajutorul funcției $\mathbf{h}$ putem defini energia liberă de echilibru $\tilde{\psi}(\mathbf{M})$ precum și tensiunea și entropia de echilibru, astfel

$$\tilde{\psi}(\mathbf{M}) = \hat{\psi}(\mathbf{M}, \mathbf{h}(\mathbf{M})), \quad \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{M}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{M}, \mathbf{h}(\mathbf{M}))$$
$$\tilde{\eta}(\mathbf{M}) = \hat{\eta}(\mathbf{M}, \mathbf{h}(\mathbf{M})). \tag{5.2.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $\tilde{\psi}$ determină funcțiile $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{M})$ și $\tilde{\eta}(\mathbf{M})$ (prin relații analoge relațiilor (5.1.21)) astfel

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{M}) = \tilde{\psi}_{\mathbf{F}}(\mathbf{M}), \quad \tilde{\eta}(\mathbf{M}) = -\tilde{\psi}_{\theta}(\mathbf{M}), \tag{5.2.15}$$

deoarece

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}) = \hat{\psi}_{\mathbf{M}}(\mathbf{M}, \mathbf{h}(\mathbf{M})) + \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{M}, \mathbf{h}(\mathbf{M}))\, \mathbf{h}_{\mathbf{M}}(\mathbf{M})$$

și

$$\hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{M}, \mathbf{h}(\mathbf{M})) = \mathbf{0}$$

datorită lui (5.2.11).

Fie acum $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}_0)$ un punct din U^* și $\boldsymbol{\alpha}_0 \neq \mathbf{h}(\mathbf{M})$; atunci existența limitei

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\alpha}\,(t, \mathbf{M}, \mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0) = \boldsymbol{\alpha}_1 \quad \text{cu} \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}_1) \in U^* \tag{5.2.16}$$

este echivalentă cu faptul că starea $(\mathbf{M}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_1)$ este asimptotic stabilă la deformație și temperatură constantă în sensul lui Coleman și Gurtin [1967]. Aici $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t, \mathbf{M}, \mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0)$ este soluția problemei inițiale $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{f}(\mathbf{M}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha})$ cu $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0$ așa cum s-a discutat în paragraful precedent. Din unicitatea funcției $\mathbf{h}$ urmează $\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{M})$.

Se vede că în vecinătatea unei stări de echilibru unde condiția (5.2.11) este satisfăcută se poate defini energia liberă de echilibru care determină tensiunea și entropia de echilibru și chiar dacă limita (5.2.16) există dar $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}_1) \notin U^*$ energia liberă, tensiunea și entropia nu tind la valorile lor de echilibru. Acest lucru poate să fie important în descrierea fenomenelor de relaxare, adică pot să existe stări de echilibru dinamic sau cvasistatic dar relaxarea să nu se facă totuși spre aceste stări de echilibru și în felul acesta să nu avem o stabilitate asimptotică.

Revenim acum la inegalitatea (5.2.7). Dacă ținem seama de definiția (5.2.4) a funcției Γ această inegalitate se scrie

Scanned with OKEN Scanner

în funcție de $\hat{\psi}$, $\mathbf{f}$ și $\hat{\mathbf{q}}$ în punctul de echilibru $\mathbf{H}^* = (\mathbf{F}^*, \theta^*, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}^*)$ astfel

$$2(\psi^*_{\alpha \mathbf{M}}[\overline{\mathbf{M}}] + \psi^*_{\alpha^2}[\overline{\boldsymbol{\alpha}}])\, \mathbf{f}^*_{\mathbf{H}}[\overline{\mathbf{H}}] +$$

$$+ \psi^*_{\alpha}(\mathbf{f}^*_{\alpha^2}[\overline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}] + 2\mathbf{f}^*_{\alpha \mathbf{G}}[\overline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\mathbf{G}}] + \mathbf{f}^*_{\mathbf{G}^2}[\overline{\mathbf{G}}, \overline{\mathbf{G}}]) + \qquad (5.2.17)$$

$$+ 2\,\{(\rho^*\theta^*)^{-1}(\mathbf{q}^*_{\mathbf{G}}[\overline{\mathbf{G}}] + \mathbf{q}^*_{\alpha}[\overline{\boldsymbol{\alpha}}] + ((\rho\theta)^{-1})^*_{\mathbf{M}}[\overline{\mathbf{M}}]\, \mathbf{q}^*\}\, \overline{\mathbf{g}} \leqslant 0$$

și trebuie să fie satisfăcută pentru toți $\overline{\mathbf{H}} = (\overline{\mathbf{F}}, \overline{\theta}, \overline{\mathbf{g}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}) \in \in \mathcal{L} \times R \times R^3 \times R^N$.

Dacă în această inegalitate facem pe rînd $\overline{\mathbf{H}}$ egal cu $(\overline{\mathbf{F}}, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{0}, \overline{\theta}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{0}, 0, \overline{\mathbf{g}}, \mathbf{0})$ și $(\mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, \overline{\boldsymbol{\alpha}})$ obținem respectiv

$$2\,(\mathbf{S}^*_{\alpha}[\overline{\mathbf{F}}])\, \mathbf{f}^*_{\mathbf{F}}[\overline{\mathbf{F}}] + \psi^*_{\alpha}\mathbf{f}^*_{\mathbf{F}^2}[\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}}] \leqslant 0, \qquad (5.2.18)$$

$$-2\eta^*_{\alpha}\mathbf{f}^*_{\theta} + \psi^*_{\alpha}\mathbf{f}^*_{\theta^2} \leqslant 0, \qquad (5.2.19)$$

$$\psi^*_{\alpha}\mathbf{f}^*_{\mathbf{g}^2}[\overline{\mathbf{g}}, \overline{\mathbf{g}}] + 2(\rho^*\theta^*)^{-1}\,(\mathbf{q}^*_{\mathbf{g}}[\overline{\mathbf{g}}])\, \overline{\mathbf{g}} \leqslant 0, \qquad (5.2.20)$$

$$2(\psi^*_{\alpha^2}[\overline{\boldsymbol{\alpha}}])\, \mathbf{f}^*_{\alpha}[\overline{\boldsymbol{\alpha}}] + \psi^*_{\alpha}\mathbf{f}^*_{\alpha^2}[\overline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}] \leqslant 0. \qquad (5.2.21)$$

Aceste inegalități trebuie să aibă loc pentru toți $\overline{\mathbf{F}} \in \mathcal{L}$, $\overline{\mathbf{g}} \in R^3$ și $\overline{\boldsymbol{\alpha}} \in R^N$. În (5.2.18) și (5.2.19) s-a ținut seama de (5.1.21). Pentru a ușura citirea inegalităților (5.2.18)—(5.2.21) prezentăm mai jos scrisă în detaliu inegalitatea (5.2.18):

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{\sum_{k,l=1}^{3}(S^{kl}_{\alpha^i})^*\,\overline{F}^{kl}\right\}\left\{\sum_{p,r=1}^{3}(f^i_{Fpr})^*\,\overline{F}^{pr}\right\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\psi^*_{\alpha^i}\left\{\sum_{k,l,p,r=1}^{3}(f^i_{FklFpr})^*\,\overline{F}^{kl}\overline{F}^{pr}\right\} \leqslant 0. \qquad (5.2.18')$$

Inegalitățile (5.2.18)—(5.2.21) au fost scrise pentru prima dată de Bowen [1968] într-o ipoteză constitutivă ceva mai generală, adică presupunînd că energia liberă, tensiunea, entropia, fluxul de căldură și funcția de evoluție, depind și de $\dot{\mathbf{F}}$—derivata în raport cu timpul a gradientului deformației.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă presupunem că starea de echilibru $\mathbf{H}^*$ este o stare de echilibru tare atunci termenii care conțin ψ_α^* se anulează iar inegalitatea (5.2.20) se reduce la

$$\mathbf{q}_g^*[\bar{\mathbf{g}}]\,\bar{\mathbf{g}} \leqslant 0 \tag{5.2.22}$$

inegalitate care ne spune că tensorul conducției de căldură $\mathbf{k}^* = -\mathbf{q}_g^*$ este pozitiv semidefinit, la o stare de echilibru tare. Dacă forma pătratică din membrul stîng al lui (5.2.22) nu este identic nulă, atunci acest rezultat împreună cu (5.2.12) conduc la concluzia că în vecinătatea unei stări de echilibru tare

$$\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}^*, \theta^*, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = -\mathbf{k}^*\mathbf{g} + \mathbf{0}(|\mathbf{g}|) \tag{5.2.23}$$

adică legea lui Fourier este adevărată cu o eroare de ordinul $\mathbf{0}(|\mathbf{g}|)$ (vezi Coleman și Gurtin [1967]).

Discutăm pe scurt acum cazul cînd starea de echilibru $\mathbf{H}^* = (\mathbf{F}^*, \theta^*, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}^*) \in \partial\mathcal{D}$ ($\partial\mathcal{D}$ — frontiera lui $\mathcal{D}$). În acest caz, în general, nu mai pot fi trase concluziile (5.2.6) și (5.2.7) asupra funcției Γ (vezi de exemplu Kratochvil și Dillon [1970] sec. IV). Totuși dacă există o vecinătate $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}^+ \times R^+ \times R^3 \times \times R^N$ a punctului $\mathbf{H}^*$ și o funcție de clasă C^2, $\tilde{\Gamma}: \mathcal{U} \to R$ astfel încît $\Gamma(\mathbf{H}) = \tilde{\Gamma}(\mathbf{H})$ pentru $\mathbf{H} \in \overline{\mathcal{D}} \cap \mathcal{U}$, $\tilde{\Gamma}(\mathbf{H}) \leqslant 0$ pentru toți $\mathbf{H} \in \mathcal{U}$, atunci condițiile (5.2.6) și (5.2.7) sînt satisfăcute. Aceasta ne permite să tragem aceleași concluzii ca și pentru cazul cînd $\mathbf{H}^*$ este punct interior domeniului $\mathcal{D}$.

Inegalitățile (5.2.18), (5.2.19) și (5.2.21) au consecințe importante în teoria propagării undelor prin materiale a căror comportare se poate descrie cu ajutorul variabilelor interne de stare (vezi de exemplu Coleman și Gurtin [1967a], Chen și Gurtin [1971], Bowen [1969], Suliciu [1975 a, b]).

§3. Principiul invarianței răspunsului materialului la schimbările de reper. Grupul de izotropie al materialului

3.a. Principiul invarianței răspunsului materialului la schimbările de reper cere ca un proces termodinamic admisibil să rămînă admisibil și după o schimbare de reper definită

Scanned with OKEN Scanner

de (vezi Noll [1958], Truesdell și Noll [1965], Coleman și Gurtin [1967], Bowen [1968], Mișicu [1967], §2.3, Noll [1972])

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c} + \mathbf{Q} * (\mathbf{x} - \mathbf{0}) \tag{5.3.1}$$

unde $\mathbf{0}$ este originea spațiului euclidian $\mathcal{E}$, $\mathbf{c}$ este vectorul de poziție al noii origini și în general depinde de timp; $\mathbf{Q}$ este o transformare liniară ortogonală dependentă de timp ($\mathbf{Q} * \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T * \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ unde $\mathbf{I}$ este transformarea identitate).

Cantitățile scalare θ, η, e și ψ rămîn neschimbate la această transformare, în timp ce $\mathbf{F}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{q}$ și $\mathbf{T}$ se transformă după cum urmează

$$\begin{gathered} \mathbf{F} \to \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q} * \mathbf{F}, \qquad \mathbf{g} \to \tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{Q} * \mathbf{g} \\ \mathbf{q} \to \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} * \mathbf{q}, \qquad \mathbf{T} \to \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{Q} * \mathbf{T} * \mathbf{Q}^T. \end{gathered} \tag{5.3.2}$$

Dacă $\boldsymbol{\alpha}$ este o mulțime $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \ldots, \alpha^N)$ de N scalari α^i (vezi de exemplu Coleman și Gurtin [1967], Bowen [1968], Teodosiu [1965]) atunci

$$\boldsymbol{\alpha} \to \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \tag{5.3.3}$$

Dacă $\boldsymbol{\alpha}^i$ sînt priviți ca tensori de ordinul doi în spațiul euclidian $\mathcal{E}$ (vezi de exemplu Kratochvil [1973]) atunci

$$\boldsymbol{\alpha}^i \to \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^i = \mathbf{Q} * \boldsymbol{\alpha}^i * \mathbf{Q}^T, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.3.4}$$

Unii autori (vezi de exemplu Perzyna [1973]) au considerat că variabilele interne de stare pot fi privite ca fiind formate din două grupuri de cantități unele de forma (5.3.3) iar altele de forma (5.3.4).

Principiul invarianței răspunsului materialului la schimbările de reper în cazul cînd $\boldsymbol{\alpha}$ se comportă ca scalari, este satisfăcut dacă și numai dacă funcțiile $\hat{\psi}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{q}}$ și $\mathbf{f}$ satisfac următoarele identități

$$\begin{gathered} \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\psi}(\mathbf{Q} * \mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\ \hat{\eta}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\eta}(\mathbf{Q} * \mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{Q} * \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) * \mathbf{Q}^T = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q} * \mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{Q} * \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q} * \mathbf{F}, \theta, \mathbf{Q} * \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(\mathbf{Q} * \mathbf{F}, \theta, \mathbf{Q} * \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \end{gathered} \tag{5.3.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

în orice punct $(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{g}) \in \mathcal{D}$ și pentru orice transformare ortogonală $\mathbf{Q}$ dependentă de timp.

Printre variabilele de stare $\boldsymbol{\alpha}$ nu pot exista vectori care să se transforme ca vectorii spațiului Euclidian $\mathcal{E}$ (vezi Coleman și Gurtin [1967]). Într-adevăr dacă printre variabilele de stare $\boldsymbol{\alpha}$ există vectorii $\mathbf{a}^i$ și tensorii de ordinul doi $\mathbf{A}^j$ care la o schimbare de reper se transformă după regulile $\mathbf{a}^i \to \mathbf{Q} * \mathbf{a}^i$, $\mathbf{A}^j \to \mathbf{Q} * \mathbf{A}^j * \mathbf{Q}^T$ atunci trebuie să avem

$$\overset{\cdot}{(\mathbf{Q} * \mathbf{a}^i)} = \mathbf{f}^{\mathbf{a}^i}(\mathbf{Q} * \mathbf{F}, \theta, \mathbf{Q} * \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Q} * \mathbf{a}^i, \mathbf{Q} * \mathbf{A}^j * \mathbf{Q}^T).$$

Acum putem alege un $\mathbf{Q}(t)$ astfel ca pentru $t = \tau$, $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{I}$ iar $\dot{\mathbf{Q}}(\tau) = \mathbf{W}$ unde $\mathbf{W}$ este un tensor antisimetric arbitrar. Din relația de mai sus aplicată pentru acest $\mathbf{Q}(t)$ la momentul $t = \tau$ se găsește $\mathbf{W} * \mathbf{a}^i = \mathbf{0}$; de unde $\mathbf{a}^i = \mathbf{0}$, deci $\mathbf{f}^{\mathbf{a}^i}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0}, \mathbf{A}_j) = \mathbf{0}$.

Cazul cînd printre variabilele interne de stare intervin și cantități care se comportă, la schimbările de reper, ca tensori de ordinul doi se tratează cu destulă ușurință de aceea nu ne vom ocupa de aceasta în continuare.

Revenim acum la identitățile (5.3.5). Teorema de descompunere polară aplicată lui $\mathbf{F}$ (vezi de exemplu Truesdell și Noll [1965] sect. 23) determină în mod unic transformarea ortogonală $\mathbf{R}$ și respectiv transformările simetrice și pozitiv definite $\mathbf{U}$ și $\mathbf{V}$ astfel

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} * \mathbf{U} = \mathbf{V} * \mathbf{R}. \tag{5.3.6}$$

Avem

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T * \mathbf{F} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} * \mathbf{F}^T = \mathbf{B}. \tag{5.3.7}$$

Tensorii $\mathbf{C}$ și $\mathbf{B}$ definiți în (5.3.7) se numesc respectiv tensorul deformației a lui Cauchy-Green la dreapta ($\mathbf{C}$) și la stînga ($\mathbf{B}$). Alegînd în (5.3.5) $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ și ținînd seama de (5.3.6) și (5.3.7) obținem

$$\begin{aligned}
\psi &= \hat{\psi}(\mathbf{U}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \check{\psi}(\mathbf{C}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\
\eta &= \hat{\eta}(\mathbf{U}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \check{\eta}(\mathbf{C}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\
\mathbf{R}^T * \mathbf{T} * \mathbf{R} &= \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{U}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{U} * \check{\mathbf{T}}(\mathbf{C}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) * \mathbf{U} \\
\mathbf{R}^T * \mathbf{q} &= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{U}, \theta, \mathbf{U}^{-1} * \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{U} * \check{\mathbf{q}}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha}) \\
\dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \mathbf{f}(\mathbf{U}, \theta, \mathbf{U}^{-1} * \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha}) = \check{\mathbf{f}}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha})
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

unde $\mathbf{g}_0 = \mathbf{F}^T * \mathbf{g}$.

Scanned with OKEN Scanner

Relațiile $(5.3.8)_{1,2}$ ne spun că energia liberă și entropia depind de $\mathbf{F}$ numai prin intermediul tensorului simetric nesingular $\mathbf{C}$ și sînt independente de rotații. Relațiile $(5.3.8)_5$ ne spun că variația parametrilor interni în cursul procesului de deformație este independentă de rotațiile locale ale particulelor materiale; în timp ce relațiile $(5.3.8)_{3,4}$ ne spun că

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} * \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{U},\ \theta,\ \boldsymbol{\alpha}) * \mathbf{R}^T = \mathbf{F} * \check{\mathbf{T}}(\mathbf{C},\ \theta,\ \boldsymbol{\alpha}) * \mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} * \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{U},\ \theta,\ \mathbf{U}^{-1} * \mathbf{g}_0,\ \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{F} * \check{\mathbf{q}}(\mathbf{C},\ \theta,\ \mathbf{g}_0,\ \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.3.9}$$

adică tensorul tensiune $\mathbf{T}$ și fluxul de căldură $\mathbf{q}$ sînt influențați numai de rotația actuală a particulei materiale și aceasta are loc în modul descris de (5.3.9).

Reciproc, dacă energia liberă ψ, entropia η, tensorul tensiune $\mathbf{T}$, fluxul de căldură $\mathbf{q}$ și funcția de evoluție sînt determinate de funcțiile $\check{\psi}$, $\check{\eta}$, $\check{\mathbf{T}}$, $\check{\mathbf{q}}$ și $\check{\mathbf{f}}$ prin intermediul relațiilor (5.3.8) atunci principiul invarianței este satisfăcut.

Toate rezultatele din §§1, 2 se pot transcrie pentru funcțiile $\check{\psi}$, $\check{\mathbf{T}}$, $\check{\eta}$, $\check{\mathbf{q}}$ și $\check{\mathbf{f}}$ în loc de $\hat{\psi}$, $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\mathbf{q}}$ și $\mathbf{f}$. Astfel relațiile (5.1.21) se scriu

$$\check{\eta} = -\check{\psi}_\theta, \quad \check{\mathbf{T}} = 2\rho\check{\psi}_\mathbf{C}. \tag{5.3.10}$$

Relațiile (5.2.8)—(5.2.10), inegalitatea (5.2.17) precum și consecințele sale (5.2.18)—(5.2.21) se pot obține fie refăcînd calculele pornind de la (5.2.4) în care se înlocuiesc $\hat{\psi}$, $\mathbf{f}$ și $\hat{\mathbf{q}}$ prin $\check{\psi}$, $\check{\mathbf{f}}$ și $\check{\mathbf{q}}$ fie schimbînd direct în ele funcțiile respective și calculînd derivatele în raport cu noile argumente $\mathbf{C}$ și $\mathbf{g}_0$.

3.b. Grupul de izotropie $G_{\mathcal{R}}$ al unui material în raport cu o configurație de referință $\mathcal{R}$ este format din mulțimea tuturor transformărilor liniare unimodulare $\mathbf{K}$ (adică cu $|\det \mathbf{K}| = 1$) ale configurației de referință $\mathcal{R}$, care lasă neschimbate funcțiile de răspuns ale materialului (vezi Noll [1958] și de asemenea Truesdell și Noll [1965], Gurtin și Williams [1966]).

Din nou se pune problema cum se modifică variabilele interne de stare la transformări ale configurației de referință

Scanned with OKEN Scanner

și răspunsul la această problemă depinde de semnificația fizică dată variabilelor interne. Urmînd pe Coleman și Gurtin [1967] și Bowen [1968] noi vom presupune că variabilele interne sînt cantități alese astfel încît ele nu se schimbă la o transformare unimodulară a configurației de referință. Condiția de unimodularitate a transformării configurației de referință apare din cerința ca transformările din grupul de izotropie să păstreze densitatea masei.

În cazul ecuațiilor constitutive postulate în acest capitol grupul de izotropie $G_{\mathcal{R}}$ în raport cu configurația de referință $\mathcal{R}$ a corpului $\mathcal{B}$ este format din mulțimea transformărilor liniare unimodulare $\mathbf{K}$ pentru care identitățile

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) &= \hat{\psi}(\mathbf{F} * \mathbf{K}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\
\hat{\eta}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) &= \hat{\eta}(\mathbf{F} * \mathbf{K}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\
\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) &= \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F} * \mathbf{K}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \qquad (5.3.11) \\
\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) &= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F} * \mathbf{K}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\
\mathbf{f}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{f}(\mathbf{F} * \mathbf{K}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}$$

sînt satisfăcute pentru toți $\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}$ în domeniul de definiție al funcțiilor respective.

Așa cum au observat Coleman și Noll [1963] (vezi și Coleman și Gurtin [1967]), dacă grupul de izotropie $G_{\mathcal{R}}$ conține transformarea $-\mathbf{I}$ și dacă invarianța răspunsului materialului la schimbările de reper este postulată în raport cu grupul ortogonal complet atunci

$$\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \qquad (5.3.12)$$

indiferent dacă starea $(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha})$ este o stare de echilibru tare sau nu. Pentru a demonstra această afirmație, utilizînd identitățile $(5.3.5)_4$ și $(5.3.11)_4$ putem scrie

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} * \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) &= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q} * \mathbf{F}, \theta, \mathbf{Q} * \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \\
&= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q} * \mathbf{F} * \mathbf{K}, \theta, \mathbf{Q} * \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}). \qquad (5.3.13)
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acum alegînd $\mathbf{Q} = -\mathbf{I}$ și $\mathbf{K} = -\mathbf{I}$ obținem

$$-\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, -\mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.3.14}$$

ceea ce conduce la (5.3.12).

Firește că rezultatul (5.3.12) are loc cu condiția suplimentară, afirmată mai înainte, că $\boldsymbol{\alpha}$ să poată fi aleși astfel ca ei să rămînă invarianți la grupul de izotropie și la schimbările de reper.

Condiția ca o aplicație liniară unimodulară $\mathbf{K}$ să aparțină grupului de izotropie se poate exprima ușor și cu ajutorul funcțiilor $\check{\psi}$, $\check{\eta}$, $\check{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{q}}$ și $\check{\mathbf{f}}$.

Un material se spune că este solid dacă există o configurație de referință a sa $\mathcal{R}_0$ în raport cu care grupul său de izotropie este conținut în grupul ortogonal. Un material se zice că este fluid dacă grupul său de izotropie este grupul unimodular. Un material se numește izotrop dacă există o configurație de referință $\mathcal{R}_0$ astfel încît grupul său de izotropie în raport cu această configurație conține grupul ortogonal.

Pentru un material solid și izotrop, există o configurație de referință $\mathcal{R}$ astfel încît grupul său de izotropie este egal cu grupul ortogonal. Atunci dacă alegem $\mathbf{K} = \mathbf{R}^T$ și ținem seama de (5.3.6) și (5.3.7) obținem următoarele forme reduse ale ecuațiilor constitutive (5.3.11) valabile pentru materiale izotrope

$$\begin{aligned}
\psi &= \bar{\psi}(\mathbf{B}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\psi}(\mathbf{V}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\
\eta &= \bar{\eta}(\mathbf{B}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\eta}(\mathbf{V}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\
\mathbf{T} &= \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{B}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{V}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\
\mathbf{q} &= \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{B}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{V}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\
\dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{B}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(\mathbf{V}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Dacă corpul $\mathcal{B}$ este fluid atunci în funcțiile $\bar{\psi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\mathbf{T}}$, $\bar{\mathbf{q}}$ și $\bar{\mathbf{f}}$ în loc de $\mathbf{B}$ va apare $1/\rho$ unde ρ este densitatea actuală de masă. Aceasta deoarece în acest caz $\mathbf{K}$ poate fi luat ca o transformare arbitrară din grupul unimodular. Deci putem alege

Scanned with OKEN Scanner

$\mathbf{K} = \sqrt[3]{\det \mathbf{F}}\,\mathbf{F}^{-1}$. Din ecuația de continuitate a masei $\det \mathbf{F} = \rho_0/\rho$ unde ρ_0 este densitatea de masă în configurația de referință. Prin urmare dacă punem în (5.3.11) $\mathbf{K} = \sqrt[3]{(\rho_0/\rho)}\,\mathbf{F}^{-1}$ urmează proprietatea enunțată mai sus.

§4. Consecințe ale restricțiilor impuse asupra energiei libere specifice

4.a. După cum s-a văzut în primele două paragrafe ale acestui capitol, legea a doua a termodinamicii (întrebuințată aici sub forma inegalității lui Clausius-Duhem) pune restricții destul de tari asupra ecuațiilor constitutive. Totuși aceste restricții permit ecuațiilor constitutive să rămînă încă prea generale și ca atare, greu, dacă nu imposibil de a fi utilizate în aplicații. Pe de altă parte acest grad mare de generalitate poate permite prezența în ecuațiile constitutive a unor efecte ce nu sînt posibile la materialele reale.

În acest paragraf și în continuare vom discuta restricțiile suplimentare care sînt impuse asupra ecuațiilor constitutive de observațiile experimentale cu caracter general. Acest lucru va face ca modelul respectiv — în cazul de față modelul corpului cu variabile interne de stare care poate descrie, desigur, efecte termo-elasto-vîsco-plastice — să devină mult mai concret, rămînînd totuși încă destul de general pentru a putea descrie comportarea complexă a unui corp real.

Pentru a justifica forma restricțiilor impuse asupra energiei libere vom recapitula pe scurt unele rezultate bine cunoscute din elasticitatea liniară (vezi de exemplu Solomon [1969] Cap. III, §3, Truesdell și Noll [1965] sec. 51).

În elasticitatea liniară și izotropă, următoarele două grupe de inegalități

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \tag{5.4.1}$$

și

$$\mu > 0, \quad \lambda + 2\mu > 0 \tag{5.4.2}$$

sînt universal acceptate. λ și μ sînt numite constantele lui Lamè. Condiția $\mu > 0$ este condiția necesară și suficientă ca tensiunea de forfecare și deformația de forfecare să aibă

Scanned with OKEN Scanner

același semn. Condiția $(5.4.1)_2$ este condiția necesară și suficientă ca tensiunea medie să aibă același semn cu variația volumului. De asemenea condiția (5.4.1) este condiția necesară și suficientă ca lucrul mecanic făcut la o deformație nerigidă să fie pozitiv, și ea reprezintă de asemenea o condiție suficientă dar nu necesară de stabilitate. Condiția mai slabă (5.4.2) este o condiție necesară și suficientă pentru stabilitate precum și pentru ca undele de accelerație să aibă viteze reale. (Pentru alte discuții vezi Truesdell și Noll [1965] sec. 51).

Pentru elasticitate neliniară, chiar în cazul izotrop și fără a lua în considerație efectele termice, discuția este mult mai complicată și nu este încă încheiată. Cititorul interesat poate găsi discuții detaliate asupra acestui subiect în cartea lui Truesdell și Noll [1965] sec. 51—53, 87 etc. precum și în lucrări mai recente, Hayes [1969].

4.b. Pentru materiale cu variabile interne de stare Bowen [1968], urmînd linia lui Coleman și Noll [1959] precum și a lui Gibbs [1928], a propus pentru energia liberă specifică următoarea inegalitate:

$$\hat{\psi}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\psi}(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) - (\theta - \widetilde{\theta})\, \hat{\psi}_\theta(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) -$$

$$- \hat{\psi}_F(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})\, (\mathbf{F} - \widetilde{\mathbf{F}}) - \hat{\psi}_\alpha(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})\, (\boldsymbol{\alpha} - \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) > 0 \qquad (5.4.3)$$

care trebuie să fie satisfăcută pentru toate punctele $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha})$, $(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ din domeniul de definiție a lui $\hat{\psi}$ astfel încît $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) \neq (\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ și $\mathbf{F} * \widetilde{\mathbf{F}}^{-1} = \mathbf{D} \in \mathcal{S}^+$. $\mathcal{S}^+$ este mulțimea aplicațiilor liniare simetrice și pozitiv definite iar $\mathcal{S}$ va fi mulțimea aplicațiilor liniare simetrice.

Firește că această inegalitate trebuie să fie compatibilă cu legea a doua a termodinamicii și cu principiul invarianței materialului la schimbările de reper.

Inegalitatea (5.4.3.) are consecințe importante. Astfel, dacă fixăm $(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ atunci membrul stîng al lui (5.4.3) ca funcție de $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{D} * \widetilde{\mathbf{F}}, \theta, \boldsymbol{\alpha})$ are un minim pentru $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ — aplicația identitate), $\theta = \widetilde{\theta}$ și $\boldsymbol{\alpha} = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$.

Fie $\overline{\mathbf{D}} \in \mathcal{S}$, $\overline{\theta} \in R$ și $\overline{\boldsymbol{\alpha}} \in R^N$; atunci pentru $\lambda > 0$ suficient de mic $\mathbf{I} + \lambda \overline{\mathbf{D}} \in \mathcal{S}^+$, $\widetilde{\theta} + \lambda \overline{\theta} \in R^+$ și ($\mathbf{F} = (\mathbf{I} +$

Scanned with OKEN Scanner

$+ \lambda\overline{\mathbf{D}}) * \widetilde{F}$, $\theta = \widetilde{\theta} + \lambda\overline{\theta}$, $\alpha = \widetilde{\alpha} + \lambda\overline{\alpha}$) este un punct din domeniul de definiție a lui $\hat{\psi}$. Introducem cu ajutorul membrului stîng al inegalității (5.4.3) o funcție δ de λ pentru $\overline{\mathbf{D}}$, $\overline{\theta}$ și $\overline{\alpha}$ fixați, astfel

$$\delta(\lambda) = \hat{\psi}((\mathbf{I} + \lambda\overline{\mathbf{D}}) * \widetilde{\mathbf{F}},\ \widetilde{\theta} + \lambda\overline{\theta},\ \widetilde{\alpha} + \lambda\overline{\alpha}) - \hat{\psi}(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\alpha}) -$$

$$- \lambda\overline{\theta}\hat{\psi}_{\theta}((\mathbf{I} + \lambda\overline{\mathbf{D}}) * \widetilde{\mathbf{F}},\ \widetilde{\theta} + \lambda\overline{\theta},\ \widetilde{\alpha} + \lambda\overline{\alpha}) - \tag{5.4.4}$$

$$- \lambda\hat{\psi}_{\mathbf{F}}(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\alpha})\,(\overline{\mathbf{D}} * \widetilde{\mathbf{F}}) - \lambda\hat{\psi}_{\alpha}(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\alpha})\,(\overline{\alpha}).$$

Această funcție are următoarele proprietăți

$$\delta(0) = 0,\ \delta'(0) = 0 \quad \text{și} \quad \delta''(0) \geqslant 0. \tag{5.4.5}$$

$(5.4.5)_{1,2}$ sînt satisfăcute identic în $\overline{\mathbf{D}}$, $\overline{\theta}$ și $\overline{\alpha}$ iar $(5.4.5)_3$ este echivalent cu

$$\hat{\psi}_{\mathbf{F}^2}(\mathbf{M},\ \alpha)\,[\overline{\mathbf{D}} * \mathbf{F},\ \overline{\mathbf{D}} * \mathbf{F}] + 2\hat{\psi}_{\mathbf{F}\alpha}(\mathbf{M}, \alpha)\,[\overline{\mathbf{D}} * \mathbf{F}, \overline{\alpha}] - \tag{5.4.6}$$

$$- \overline{\theta}^2\hat{\psi}_{\theta^2}(\mathbf{M},\ \alpha) + \hat{\psi}_{\alpha^2}(\mathbf{M}, \alpha)\ [\overline{\alpha}, \overline{\alpha}] \geqslant 0.$$

Inegalitatea de mai sus trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi $\overline{\mathbf{D}} \in \mathcal{S}$, $\overline{\theta} \in R$ și $\overline{\alpha} \in R^N$. Deoarece (5.4.6) trebuie să aibă loc pentru orice punct $(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\alpha})$ am omis semnul tildă deasupra lui $\mathbf{M}$ și α.

Dacă punem pe rînd în (5.4.6), $(\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{0},\ \overline{\theta},\ \overline{\alpha} = \mathbf{0})$, $(\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{0},\ \overline{\theta} = \mathbf{0},\ \overline{\alpha})$ și $(\overline{\mathbf{D}},\ \overline{\theta} = 0,\ \overline{\alpha} = 0)$ obținem respectiv

$$-\hat{\psi}_{\theta^2}(\mathbf{M},\ \alpha) = \hat{\eta}_{\theta}(\mathbf{M},\ \alpha) \geqslant 0 \tag{5.4.7}$$

$$\hat{\psi}_{\alpha^2}(\mathbf{M},\ \alpha)\,[\overline{\alpha},\ \overline{\alpha}] = \hat{\psi}_{\alpha^i\alpha^j}(\mathbf{M},\ \alpha)\ \overline{\alpha}^i\overline{\alpha}^j \geqslant 0 \tag{5.4.8}$$

$$\hat{\psi}_{\mathbf{F}^2}(\mathbf{M},\ \alpha)\,[\overline{\mathbf{D}} * \mathbf{F},\ \overline{\mathbf{D}},\ * \mathbf{F}] =$$

$$= \hat{\psi}_{F^{ij}F^{kl}}(M,\ \alpha)\ \overline{D}^{ir}F^{rj}\overline{D}^{kp}F^{pl} \geqslant 0. \tag{5.4.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

În inegalitatea (5.4.7) s-a ținut seama de (5.1.21). Inegalitățile (5.4.8) și (5.4.9) trebuie să fie satisfăcute respectiv pentru orice $\bar{\boldsymbol{\alpha}} \in R^N$ și orice $\mathbf{D} \in \mathcal{S}$. Cantitatea

$$C = \theta \hat{\eta}_\theta(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.4.10}$$

se numește căldură specifică la deformație constantă și variabile interne de stare constante. Atunci inegalitatea (5.4.7) implică $C \geqslant 0$.

Vom discuta în continuare alte consecințe ale inegalității (5.4.3). Dacă alegem în (5.4.3) $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^*$, $\tilde{\theta} = \theta^*$, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}^*$ astfel încît $(\mathbf{F}^*, \theta^*, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}^*)$ este o stare de echilibru tare (vezi (5.2.2)) atunci (5.4.3) conduce la

$$\hat{\psi}(\mathbf{M}^*, \boldsymbol{\alpha}) > \hat{\psi}(\mathbf{M}^*, \boldsymbol{\alpha}^*). \tag{5.4.11}$$

Această inegalitate ne spune că energia liberă specifică are un minim în raport cu $\boldsymbol{\alpha}$ pentru $\mathbf{M} = \mathbf{M}^* = \text{const}$.

Funcția

$$V(\boldsymbol{\alpha}) = \hat{\psi}(\mathbf{M}^*, \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\psi}(\mathbf{M}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) \tag{5.4.12}$$

este funcție Liapunov (vezi de exemplu Halanay [1963] Cap. 1 §1, Hartman [1964] Cap. III §8) pentru sistemul (5.1.7) cu $\mathbf{F} = \mathbf{F}^*$, $\theta = \theta^*$, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, adică V satisface următoarele condiții

$$V(\boldsymbol{\alpha}^*) = 0, \quad V(\boldsymbol{\alpha}) > 0 \quad \text{pentru toți } \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{D}_1 - \{\boldsymbol{\alpha}^*\} \tag{5.4.13}$$

și

$$-\dot{V}(\boldsymbol{\alpha}) = \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{M}^*, \boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{f}(\mathbf{M}^*, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0 \quad \text{pentru toți } \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{D}_1 - \{\boldsymbol{\alpha}^*\} \tag{5.4.14}$$

unde $\mathcal{D}_1$ este intersecția domeniului $\mathcal{D}$ de definiție a lui $\hat{\psi}$ cu $\mathbf{M} = \mathbf{M}^*$. (5.4.13) urmează din (5.4.12) și (5.4.11) iar (5.4.14) urmează din (5.2.4).

Se spune că o soluție $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ (definită pentru $t \geqslant 0$) a sistemului

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{f}(\mathbf{M}^*, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha})$$

este stabilă (după Liapunov) dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încît dacă $|\boldsymbol{\alpha}_0 - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(0)| < \delta_\varepsilon$ atunci

$$|\boldsymbol{\alpha}(t, \boldsymbol{\alpha}_0) - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(t)| < \varepsilon \quad \text{pentru toți } t \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aici avem următorul rezultat: Soluția $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \boldsymbol{\alpha}^*$ pentru $t \geqslant 0$ este stabilă (vezi de exemplu Halanay [1963] Cap. I, §1, Teorema 1.1).

Dacă inegalitatea (5.4.14) este satisfăcută strict pentru $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\alpha}^*$ și $\boldsymbol{\alpha}$ dintr-o sferă din $\mathcal{D}_1$ cu centrul în $\boldsymbol{\alpha}^*$ atunci limita $(5.2.16)_1$ există și ea satisface condiția $(5.2.16)_2$, adică soluția $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}^*$ pentru $t \geqslant 0$ este asimptotic stabilă.

Inegalitatea (5.4.3), consecințele sale (5.4.7) — (5.4.8) și discuțiile care-i urmează sînt datorate lui Bowen [1968].

4.c. După cum s-a văzut nai sus inegalitatea „apriorică" (5.4.3) are consecințe importante asupra ecuațiilor constitutive. Un alt tip de inegalitate „apriorică" este așa numita condiție de elipticitate; ea poate fi scrisă sub aceeași formă ca (5.4.3), adică

$$\hat{\psi}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\psi}(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) - (\theta - \bar{\theta})\,\hat{\psi}_\theta(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) -$$

$$-\hat{\psi}_{\mathbf{F}}(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})\,(\mathbf{F} - \widetilde{\mathbf{F}}) - \hat{\psi}_\alpha(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})\,(\boldsymbol{\alpha} - \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) > 0. \quad (5.4.15)$$

Această inegalitate se cere să fie satisfăcută pentru toate punctele $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha})$, $(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ din domeniul de definiție a lui $\hat{\psi}$ și $\mathbf{f}_g$ (de forma $(\widetilde{\mathbf{M}}, \mathbf{g} = \mathbf{0}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$) astfel încît $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) \neq (\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})$ și

$$\mathbf{F} = \widetilde{\mathbf{F}} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \quad \theta = \lambda + \widetilde{\theta},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{f}_g(\widetilde{\mathbf{M}}, \mathbf{0}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}})\,[\mathbf{c}] \quad (5.4.16)$$

cu $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^3$ și $\lambda \in R$ satisfăcînd condițiile

$$\{\operatorname{sgn}(\det \widetilde{\mathbf{F}})\} \det(\widetilde{\mathbf{F}} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) > 0, \quad \lambda + \widetilde{\theta} > 0. \quad (5.4.17)$$

Aici aplicația liniară $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ (produsul tensorial sau produsul diadic al lui $\mathbf{a}$ cu $\mathbf{b}$) are matricea $a_i b_j$ într-o bază ortonormală din R^3.

Deosebirea formală dintre inegalitatea (5.4.3) și (5.4.15) constă numai în forma $(5.4.16)_1$ prin care diferă $\mathbf{F}$ de $\widetilde{\mathbf{F}}$ și $\boldsymbol{\alpha}$ de $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ și în condițiile (5.4.17) ce trebuie să le satisfacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ și λ. În realitate, inegalitatea (5.4.15) este în general mult mai puțin restrictivă, ea impunînd condiții numai asupra a 10 parametri în timp ce inegalitatea (5.4.3) pune restricții asupra a $N + 7$ parametri.

Scanned with OKEN Scanner

Urmînd același procedeu care a fost urmat în obținerea inegalității (5.4.6) se găsește ca o consecință a lui (5.4.15) că

$$\hat{\psi}_{F^2}(\mathbf{M}, \alpha)[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] + 2\hat{\psi}_{F\alpha}(\mathbf{M}, \alpha)[\mathbf{a} \otimes$$

$$\otimes \mathbf{b}, \mathbf{f}_g(\mathbf{M}, \mathbf{0}, \alpha)[\mathbf{c}]] - \lambda^2 \hat{\psi}_{0^2}(\mathbf{M}, \alpha) +$$

$$+ \hat{\psi}_{\alpha^2}(\mathbf{M}, \alpha)[\mathbf{f}_g(\mathbf{M}, \mathbf{0}, \alpha)[\mathbf{c}], \mathbf{f}_g(\mathbf{M}, \mathbf{0}, \alpha)[\mathbf{c}]] \geqslant 0 \qquad (5.4.18)$$

trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi $\lambda \in R$ și $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^3$.

Din (5.4.18) rezultă imediat că (5.4.7) este satisfăcută în tot domeniul de definiție a lui $\hat{\psi}$ iar în loc de (5.4.8) și (5.4.9) obținem

$$\hat{\psi}_{\alpha^2}(\mathbf{M}, \alpha)[\mathbf{f}_g(\mathbf{M}, \mathbf{0}, \alpha)[\mathbf{c}], \mathbf{f}_g(\mathbf{M}, \mathbf{0}, \alpha)[\mathbf{c}]] \geqslant 0 \qquad (5.4.19)$$

$$\hat{\psi}_{F^2}(\mathbf{M}, \alpha)[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] \geqslant 0 \qquad (5.4.20)$$

pentru toți $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ din R^3.

Condiția (5.4.20) a fost pentru prima dată folosită de Hadamard [1903] ca o condiție de stabilitate. În cazul cînd această condiție este satisfăcută strict pentru $\mathbf{a} \neq 0$ și $\mathbf{b} \neq \neq 0$ ea se numește condiție de elipticitate tare și asigură în cazul mecanic pur, elipticitatea sistemului de ecuații cu derivate parțiale pentru probleme statice. O serie de consecințe statice ale condiției de elipticitate tare, în cazul elastic neliniar, au fost studiate de Hayes [1969]. În cazul problemelor de elastodinamică condiția de elipticitate tare asigură existența undelor de accelerație reale cu viteză de propagare finită și nenulă (vezi de exemplu Truesdell și Noll [1965] citat mai sus și de asemenea Cap. VI în continuare).

§5. Modele elasto-vîsco-plastice cu variabile interne de stare

5.a. **Considerații preliminare.** Foarte adesea în mecanica solidelor deformabile în locul gradientului deformației $\mathbf{F}$ sau al tensorului deformației $\mathbf{C}$ a lui Cauchy-Green, se folosește tensorul deformației $\mathbf{E}$ definit astfel

$$\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I}, \quad (2E^{ij} = \frac{\partial \chi^k}{\partial X^i} \frac{\partial \chi^k}{\partial X^j} - \delta^{ij}). \qquad (5.5.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Tensorul $\mathbf{E}$ are proprietatea că se anulează în configurația de referință (atunci cînd $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}$).

În teoria plasticității se obișnuește să se presupună — fie că tensorul $\mathbf{E}$ este o sumă de doi tensori: de tensorul deformației elastice $\mathbf{E}^e$ și de tensorul deformației plastice (neelastice) $\mathbf{E}^p$, adică

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p, \tag{5.5.2}$$

— ori că gradientul deformației $\mathbf{F}$ se poate descompune în produsul a două aplicații liniare $\mathbf{F}^e$ responsabilă pentru deformația elastică și $\mathbf{F}^p$ responsabilă pentru deformația plastică, astfel încît

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e * \mathbf{F}^p \tag{5.5.3}$$

5.b. **Presupuneri constitutive.** Există o mare varietate în privința alegerii variabilelor de stare și a formelor funcțiilor de stare. Deosebirile există nu numai de la autor la autor dar și de la lucrare la lucrare și uneori chiar în cadrul aceleași lucrări. Noi vom prezenta aici pe scurt, numai unele puncte de vedere.

Indiferent dacă se pornește de la descompunerea (5.5.2) sau (5.5.3) unii autori aleg ca variabile de stare deformația totală $\mathbf{E}$ (sau $\mathbf{F}$), temperatura absolută θ, gradientul temperaturii $\mathbf{g}$ și în calitate de variabile interne de stare deformația plastică $\mathbf{E}^p$ (sau $\mathbf{F}^p$) și un alt număr de variabile interne de stare ω (adică $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{E}^p, \omega)$) care țin seama de aranjamentele dislocațiilor și de ecruisarea materialului. Unii autori consideră că $\boldsymbol{\omega}$ sînt tensori de ordinul doi, tensorii aranjamentelor dislocațiilor (vezi de exemplu Kratochvil și Dillon [1969]) iar alți autori consideră că în afară de tensorii de ordinul doi, printre $\boldsymbol{\omega}$ se află și mărimi scalare (vezi de exemplu Perzyna [1971], Baltov [1971]).

În calitate de funcții de stare sînt alese energia liberă specifică ψ, entropia specifică η, primul tensor tensiune al lui Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}_I$ (sau tensorul tensiune a lui Cauchy $\mathbf{T}$, $\mathbf{T} = \rho \mathbf{F} * \mathbf{S}_I * \mathbf{F}^T$) și fluxul de căldură $\mathbf{q}$, iar pentru $\mathbf{E}^p$ (sau $\mathbf{F}^p$) și $\boldsymbol{\omega}$ sînt postulate ecuații de evoluție, presupunîndu-se că variația acestor funcții în timp este determinată de funcții de variabilele de stare. Uneori se presupune că funcțiile de stare depind de variabilele de stare $\mathbf{E}$ și $\mathbf{E}^p$ numai prin intermediul diferenței $\mathbf{E}^e = \mathbf{E} - \mathbf{E}^p$ (vezi de

Scanned with OKEN Scanner

exemplu Kratochvil și Dillon [1970]) și că funcția care dă pe $\mathbf{S}_I$ poate fi inversată în raport cu $\mathbf{E}^e$ (vezi de exemplu Kestin și Rice [1970]) și atunci ca variabilă de stare poate fi privită tensiunea în locul deformației.

Un alt punct de vedere este ca deformația plastică să fie scoasă din rîndul variabilelor de stare; pentru ea postulîndu-se o ecuație de evoluție în funcție de: variabilele ce descriu mișcarea dislocațiilor, variabilele interne de stare, temperatura și gradientul acesteia și în funcție de deformația elastică $\mathbf{F}^e$ (vezi de exemplu Zarka [1970], Kröner și Teodosiu [1972], Teodosiu și Sidoroff [1976]) sau în funcție de $\mathbf{E}$ (vezi Perzyna [1973]).

Indiferent de alegerea variabilelor de stare și a funcțiilor de stare, se acceptă în general următoarele ipoteze. Energia liberă specifică este determinată de o funcție netedă de variabilele de stare. Același lucru se poate presupune și despre funcțiile care determină entropia, tensiunea și fluxul de căldură. În felul acesta toate rezultatele prezentate în paragrafele 1, 3 și 4 se pot transcrie cu ușurință în termenii variabilelor și funcțiilor de stare care convenim să le alegem.

Problema majoră și încă deschisă în vîscoplasticitate rămîne stabilirea ecuațiilor de evoluție pentru variabilele interne de stare. Se presupune că funcțiile de evoluție definite pe anumite domenii din spațiul variabilelor de stare (spațiul punctelor de forma $(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha})$) cu valori în spațiul R^N (al variabilelor interne de stare) sînt continue pe aceste domenii dar ele nu sînt necesar derivabile pe tot domeniul lor de definiție. De multe ori se consideră că derivatele funcțiilor de evoluție au discontinuități la traversarea anumitor hipersuprafețe din spațiul variabilelor de stare. Aceste hipersuprafețe ar reprezenta o transpunere a teoriei clasice a suprafețelor de încărcare în cadrul acestei teorii.

Pentru diferite moduri de alegere a funcțiilor de evoluție cititorul este trimis la lucrările lui: Perzyna [1971a], [1971b] [1973], Teodosiu și Sidoroff [1976], Kratochvil și Dillon [1969, [1970], Perzyna și Wojno [1968], Zarka [1970], Mandel [1972], Onat și Fardshisheh [1972]. În paragraful următor va fi prezentată o astfel de alegere după Kratochvil și Dillon [1970], Zarka [1970], Onat și Fardshisheh [1972].

Scanned with OKEN Scanner

§6. Teorii unidimensionale de plasticitate cu variabile interne de stare

6.a. O ecuație constitutivă cvasiliniară de tip rate pentru cazul unidimensional cînd efectele termice sînt neglijate (vezi Cap IV, §1 (4.1.2)) poate fi privită ca o ecuație constitutivă cu o singură variabilă internă de stare (vezi Cap. IV, §3 formulele (4.3.19) sau într-un caz particular dar mult mai explicit vezi §5 formulele (4.5.3) și (4.5.4)). În notațiile din acest capitol putem scrie

$$\sigma = \hat{\sigma}(\varepsilon, \alpha_1)$$

$$\dot{\alpha}_1 = f_1(\varepsilon, \alpha_1) \tag{5.6.1}$$

unde σ și ε sînt respectiv tensiunea (pe unitatea de arie inițială) și deformația unidimensională iar α_1 este o variabilă internă de stare (α_1 poate fi identificat cu τ iar $\hat{\sigma}$ cu f și f_1 cu μ din Cap. IV). Cel mai adesea se presupune că funcția $\hat{\sigma}$ este liniară în ambele argumente (vezi 4.5.3)) adică

$$\hat{\sigma}(\varepsilon, \alpha_1) = E\varepsilon + \alpha_1. \tag{5.6.2}$$

Pentru discuții asupra formelor funcțiilor $\hat{\sigma}$ și f_1 cititorul este trimis la Cap. IV, §§1—5.

6.b. Kratochvil și Dillon [1970] discută următorul set explicit de ecuații constitutive pentru cazul unidimensional în cazul în care efectele termice sînt luate în considerație

$$\psi = \frac{E}{2\rho_0}(\varepsilon - \alpha_1)^2 + \frac{1}{\rho_0}\nu\alpha_2 - \frac{\varkappa}{\rho_0}\theta\left[\ln\frac{\theta}{\theta_0} - 1\right] \tag{5.6.3}$$

$$q = -k\partial\theta/\partial X \tag{5.6.4}$$

$$\dot{\alpha}_1 = f_1(\varepsilon, \theta, \alpha_1, \alpha_2) =$$

$$= \begin{cases} A[E(\varepsilon - \alpha_1) - K\alpha_2], & E(\varepsilon - \alpha_1) - K\alpha_2 \geqslant 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , & E(\varepsilon - \alpha_1) - K\alpha_2 < 0 \end{cases} \tag{5.6.5}$$

$$\dot{\alpha}_2 = f_2(\varepsilon, \theta, \alpha_1, \alpha_2) = Rf_1(\varepsilon, \theta, \alpha_1, \alpha_2) - (\alpha_2 - \bar{\alpha})\,N(\theta) \tag{5.6.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde E, ν, $\varkappa$, A, K, R și $\overline{\alpha}$ sînt constante ale materialului iar $N(\theta)$ este o funcție de $\theta \cdot \alpha_1$ este interpretat ca deformație plastică iar α_2 este interpretat ca numărul dislocațiilor și este supus restricției $\alpha_2 \geqslant \overline{\alpha}$. Aplicînd (5.1.21) lui (5.6.2) găsim că

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha_1), \tag{5.6.7}$$

$$\eta = \frac{\varkappa}{\rho_0}\left(\ln\frac{\theta}{\theta_0} + \frac{\theta}{\theta_0} - 1\right). \tag{5.6.8}$$

Așa cum s-a observat în §5 rezultatele din §2 nu se mai aplică aici deoarece funcțiile de evoluție f_1 și f_2 nu sînt derivabile peste tot în domeniul de definiție. Prin utilizarea directă a inegalității (5.1.22) se ajunge la concluzia că

$$k \geqslant 0 \quad \text{și} \quad N(\theta) \geqslant 0, \quad K\overline{\alpha} \geqslant R\nu. \tag{5.6.9}$$

Dacă supunem funcția ψ restricției (5.4.15) atunci (5.4.6) și (5.4.20) ne vor conduce la concluziile general admise că

$$E \geqslant 0, \quad \varkappa \geqslant 0. \tag{5.6.10}$$

După cum se știe E se numește modulul lui Young iar $\varkappa$ se numește căldură specifică la deformație constantă (volum constant). Inegalitatea (5.4.19) este satisfăcută în mod banal deoarece aici f_1 și f_2 nu depind de $g = \partial\theta/\partial X$.

Pe baza celor dezvoltate în paragrafele anterioare nu putem spune nimic asupra semnului constantelor ν, A, K, R și $\overline{\alpha}$ ce intervin în model. Kratochvil și Dillon [1970] au presupus că acestea sînt pozitive.

Observăm de asemenea că stările de forma (pentru $N(\theta) = 0$)

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \overline{\alpha} \\ \alpha_1 &= \varepsilon - \frac{K}{E}\overline{\alpha} \end{aligned} \tag{5.6.11}$$

sînt stări de echilibru (vezi §2); dar ele nu sînt stări de echilibru tare decît dacă $\nu = 0$ și $\alpha_1 = \varepsilon$.

Faptul că un model determinat de relațiile (5.6.3) — (5.6.8) poate descrie fenomene de: ecruisare, fluaj și relaxare se poate verifica direct. Cititorul interesat în astfel

Scanned with OKEN Scanner

de calcule este trimis la Mandel [1972] unde va găsi discutat și un model unidimensional cu două variabile interne de stare propus de Zarka [1970]. Cele două variabile interne de stare folosite de Zarka (vezi Mandel [1972]) sînt deformația plastică și rădăcina cubică a densității segmentelor de dislocație pe unitatea de volum.

Exemple unidimensionale interesante por fi obținute și din particularizarea pentru acest caz a rezultatelor prezentate de Teodosiu și Sidoroff [1976]. Forme particulare efective cu două variabile interne de stare au fost construite și de Onat și Fardshisheh [1972] pentru descrierea fenomenelor de fluaj și relaxare ale metalelor. Ei nu interpretează aceste variabile în termenii teoriei dislocațiilor iar funcțiile de evoluție sînt determinate din rezultatele experimentale (fenomenologie) de fluaj și relaxare.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

Termodinamica ecuațiilor constitutive de tip rate*)

§1. Termodinamica ecuațiilor constitutive de tip rate. Cazul unidimensional

Vom spune că cunoaștem starea termodinamică $\mathbf{s}$ la timpul t a unei particule materiale a corpului $\mathcal{B}$ care are coordonata X în configurația de referință, adică este cunoscută următoarea mulțime de mărimi (vezi Anexa 2 pentru semnificația notațiilor)

$$\mathbf{s} = (\varepsilon, \theta, g; \sigma, \psi, \eta, k) \tag{6.6.1}$$

unde, pentru comoditate am introdus notația

$$k = \frac{q}{\rho_0 \theta}. \tag{6.1.2}$$

Evident că $\mathbf{s}$ poate fi interpretat ca un punct în R^7 ale cărui coordonate depind de X și t.

Vom numi proces termodinamic de durată $T_s \geqslant 0$ al unei particule materiale, o funcție $\mathbf{s}: [0, T_s] \to R^7$,

$\mathbf{s}(t) = (\varepsilon(t), \theta(t), g(t); \sigma(t), \psi(t), \eta(t), k(t))$ de clasă C^{01}.

---

*) **Notă.** Rezultatele prezentate în acest capitol, §§ 1—4 au fost obținute după cum urmează: Restricțiile impuse de legea a doua a termodinamicii asupra ecuațiilor constitutive cvasiliniare de tip rate descrise în § 1 și § 3 au fost obținute în esență de Gurtin și Suliciu [1972]. Dezvoltările din § 2 și § 4 se datorează acelorași autori și au fost obținute în cursul anilor 1973—1974, prin corespondență.

(Pentru semnificația lui C^{01} vezi cap. IV, §3). $\tau = (\varepsilon, \theta, g)$: $[0, T_\tau] \to R^3$ va fi numită traiectoria de durată T_τ a procesului $\mathbf{s}$. Putem avea traiectorii de durată $T_\tau \geqslant T_s$.

Vom spune că o particulă materială a unui corp $\mathcal{B}$ are o comportare de tip rate dacă există un domeniu $\mathcal{D} \subset R^7$ și funcțiile continui a_i, b_i, c_i, d_i: $\mathcal{D} \to R$, $i = 1, 2, 3, 4$ și pentru orice proces $\mathbf{s}$ de clasă C^{01} care pornește de la o stare $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{D}$, există o durată $T_s > 0$ astfel încît

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= a_1(\mathbf{s})\,\dot{\varepsilon} + a_2(\mathbf{s})\,\dot{\theta} + a_3(\mathbf{s})\,\dot{g} + a_4(\mathbf{s}) \\
\dot{\sigma} &= b_1(\mathbf{s})\,\dot{\varepsilon} + b_2(\mathbf{s})\,\dot{\theta} + b_3(\mathbf{s})\,\dot{g} + b_4(\mathbf{s}) \\
\dot{\eta} &= c_1(\mathbf{s})\,\dot{\varepsilon} + c_2(\mathbf{s})\,\dot{\theta} + c_3(\mathbf{s})\,\dot{g} + c_4(\mathbf{s}) \\
\dot{k} &= d_1(\mathbf{s})\,\dot{\varepsilon} + d_2(\mathbf{s})\,\dot{\theta} + d_3(\mathbf{s})\,\dot{g} + d_4(\mathbf{s})
\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

sînt satisfăcute pentru orice $t \in [0, T_s]$ cu excepția eventuală a unei mulțimi cel mult numărabile de puncte din $[0, T_s]$. Vom spune că $\mathcal{B}$ are o comportare de tip rate dacă fiecare particulă a sa are o comportare de tip rate.

În termeni mai puțin precișii dar poate mai sugestivi, o particulă a unui corp are o comportare de tip rate dacă cunoașterea stării sale la timpul t și a creșterilor lui (ε, θ, g) ne permite să determinăm creșterile lui (σ, ψ, η, k) cu ajutorul funcțiilor a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 1, 2, 3, 4$, care descriu proprietățile materialului.

Se vede că o traiectorie $\tau(t) = (\varepsilon(t), \theta(t), g(t))$, $t \in [0, T_\tau]$ și condițiile inițiale $\sigma(0) = \sigma_0$, $\psi(0) = \psi_0$, $\eta(0) = \eta_0$, $k(0) = k_0$ sînt suficiente pentru ca ecuațiile (6.1.3) să determine un proces termodinamic unic $\mathbf{s}(t)$ pentru $t \in [0, T_s]$, $0 < T_s \leqslant T_\tau$ dacă funcțiile a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sînt suficient de bune. În continuare se va presupune că funcțiile a_i, b_i, c_i, d_i sînt date astfel încît orice traiectorie fixată și orice condiții inițiale fixate determină un proces termodinamic unic. Un astfel de proces se spune că începe la starea $\mathbf{s}_0 = (\varepsilon_0, \theta_0, g_0, \sigma_0, \psi_0, \eta_0, k_0)$, unde $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$, $g_0 = g(0)$ și este generat de traiectoria $\tau(t)$.

Scopul acestui paragraf este de a determina restricțiile ce trebuie să le satisfacă funcțiile a_i, b_i, c_i, d_i din (6.1.3) astfel ca inegalitatea lui Clausius-Duhem (vezi Anexa 2) să nu fie violată.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de (A2.3), (A2.4), (A2.6), inegalitatea $(A2.6)_3$ poate fi pusă sub forma

$$\dot{\psi} - \frac{1}{\rho_0}\sigma\dot{\varepsilon} + \eta\dot{\theta} + kg \leqslant 0. \tag{6.1.4}$$

Acum putem enunța următoarea teoremă (Gurtin și Suliciu [1972])

Teorema 6.1.1. Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuațiile constitutive (6.1.3) să nu violeze inegalitatea (6.1.4) în nici un proces pornind de la o stare $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{D}$ și de o anume durată pozitivă T_s este ca

$$\rho_0 a_1(\mathbf{s}) = \sigma, \quad a_2(\mathbf{s}) = -\eta$$

$$a_3(\mathbf{s}) = 0 \quad \text{oricare ar fi } \mathbf{s} \in \mathcal{D}, \tag{6.1.5}$$

$$a_4(\mathbf{s}) + kg \leqslant 0. \tag{6.1.6}$$

Demonstrație: Introducînd $(6.1.3)_1$ în (6.1.4) și alegînd $\mathbf{s} \in \mathcal{D}$ arbitrar dar fix, atunci deoarece $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\theta}$, $\dot{g}$ pot fi alese arbitrare și se poate găsi un proces din C^{01}, de durată pozitivă, care satisface (6.1.3), atunci (6.1.5) și (6.1.6) rezultă imediat. Invers, dacă funcțiile a_i sînt definite astfel încît (6.1.5) și (6.1.6) sînt îndeplinite, inegalitatea (6.1.4) are loc.

Din inegalitatea (6.1.6) nu se poate trage concluzia că $a_4(\mathbf{s}) \leqslant 0$ și $kg \leqslant 0$ însă avem

$$\begin{aligned} a_4(\varepsilon,\ \theta,\ 0;\ \sigma,\ \psi,\ \eta,\ k) &= 0 \\ a_4(\varepsilon,\ \theta,\ g;\ \sigma,\ \psi,\ \eta,\ 0) &= 0 \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

O stare $\mathbf{s}_0 = (\varepsilon_0,\ \theta_0,\ g_0 = 0,\ \sigma_0,\ \psi_0,\ \eta_0,\ k_0)$ se numește relaxată (în raport cu energia) dacă

$$a_4(\mathbf{s}_0) = 0. \tag{6.1.8}$$

Fie

$$\mathbf{s}_0 = (\varepsilon_0,\ \theta_0,\ g_0 = 0,\ \sigma_0,\ \psi_0,\ \eta_0,\ k_0)$$

și

$$\mathbf{s}_1 = (\varepsilon_1,\ \theta_1,\ g_1 = 0,\ \sigma_1,\ \psi_1,\ \eta_1,\ k_1)$$

Scanned with OKEN Scanner

două stări. Spunem că $\mathbf{s}_0$ este atrasă de $\mathbf{s}_1$ în energie dacă

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1, \ \theta_0 = \theta_1 \tag{6.1.9}$$

și dacă procesul admisibil $\mathbf{s}(t)$ care începe din starea $\mathbf{s}_0$ și care este generat de traiectoria

$$\tau(t) = (\varepsilon_0, \ \theta_0, \ g_0 = 0), \quad t \geqslant 0 \tag{6.1.10}$$

satisface

$$\psi(\mathbf{s}(t)) = \psi_1 \tag{6.1.11}$$

pentru toți $t \geqslant t_1 > 0$ (t_1 poate fi infinit).

Teorema 6.1.2. Fie $\mathbf{s}_0$ atras de $\mathbf{s}_1$ în energie. Atunci

$$\psi_1 \leqslant \psi_0. \tag{6.1.12}$$

Demonstrație. Această inegalitate urmează din $(6.1.7)_1$, $(6.1.3)_1$ și din faptul că $\dot{\tau}(t) = 0$ pentru $t \geqslant 0$.

O mulțime $\Sigma_R \subset R^7$ se numește suprafață regulată de relaxare în energie dacă ea are următoarele proprietăți:

(R_1) Orice $\mathbf{s} = (\varepsilon, \ \theta, \ g = 0, \ \sigma, \ \psi, \ \eta, \ k) \in \Sigma_R$ este relaxat.

(R_2) Între proiecția D a domeniului $\mathcal{D}$ de definiție a funcțiilor a_i, b_i, c_i, d_i pe planul $(\varepsilon, \ \theta)$ și Σ_R există o corespondență biunivocă $\mathbf{s}_R$: $D \to \Sigma_R$;

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_R(\varepsilon, \ \theta) = (\varepsilon, \ \theta, \ g =$$

$$= 0, \ \sigma_R(\varepsilon, \ \theta), \ \psi_R(\varepsilon, \ \theta), \ \eta_R(\varepsilon, \ \theta), k_R(\varepsilon, \ \theta)) \tag{6.1.13}$$

(R_3) Funcția ψ_R este de clasă C^1.

Mai departe spunem că $\mathbf{u} = (u_1, \ u_2, \ 0) \in R^3$. $|\mathbf{u}| = 1$ este o direcție de relaxare în $\mathbf{s}_0 \in \Sigma_R$ dacă există un proces admisibil $\mathbf{s}(t)$ astfel încît

$$\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}_0, \quad \dot{\tau}(0) = \mathbf{u} \tag{6.1.14}$$

și pentru t suficient de mic, $\mathbf{s}(t)$ este atras (în energie) la $\mathbf{s}_R(\varepsilon(t), \ \theta(t))$.

Teorema 6.1.3. Fie Σ_R o suprafață regulată de relaxare și fie $\mathbf{u}$ o direcție de relaxare în $\mathbf{s}_0 \in \Sigma_R$. Atunci

$$[\nabla \psi_R(\varepsilon_0, \ \theta_0) - f_R(\varepsilon_0, \ \theta_0)] \, \mathbf{u} \leqslant 0. \tag{6.1.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel dacă orice direcție este o direcție de relaxare, atunci

$$\nabla\psi_R(\varepsilon_0,\ \theta_0) = f_R(\varepsilon_0,\ \theta_0) \tag{6.1.16}$$

unde

$$\nabla\psi_R(\varepsilon_0,\ \theta_0) = \left(\frac{\partial\psi_R(\varepsilon_0,\ \theta_0)}{\partial\varepsilon},\quad \frac{\partial\psi_R(\varepsilon_0,\ \theta_0)}{\partial\theta}\right)$$

$$f_R(\varepsilon_0,\ \theta_0) = \left(\frac{1}{\rho_0}\,\sigma_R(\varepsilon_0,\ \theta_0),\ -\eta_R(\varepsilon_0,\ \theta_0)\right) \tag{6.1.17}$$

Demonstrație: Fie $\mathbf{s}(t)$ procesul admisibil cu proprietățile cerute în propoziția conținînd (6.1.14). Fie

$$\mathbf{I} = \nabla\psi_R(\varepsilon_0,\ \theta_0)\,W - f_R(\varepsilon_0,\ \theta_0)\,W =$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\psi_R(\varepsilon(t),\ \theta(t)) - \psi_R(\varepsilon_0,\ \theta_0)}{t} - f_R(\varepsilon_0,\ \theta_0)\,(\dot\varepsilon(0),\ \dot\theta(0)).$$

Deoarece $\mathbf{s}_0$ este relaxat, din $(6.1.3)_1$, $(6.1.5)_{1,2}$ și (6.1.13) deducem că

$$f_R(\varepsilon_0,\ \theta_0)\,(\dot\varepsilon(0),\ \dot\theta(0)) = \dot\psi(0).$$

Astfel

$$I = \lim_{t\to 0+}\left[\frac{\psi_R(\varepsilon(t),\ \theta(t)) - \psi_R(\varepsilon_0,\ \theta_0)}{t} - \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t}\right].$$

Dar $\psi_R(\varepsilon_0,\ \theta_0) = \psi(0)$ și astfel

$$I = \lim_{t\to 0+}\frac{\psi_R(\varepsilon(t),\ \theta(t)) - \psi(t)}{t}.$$

Dar $\mathbf{s}(t)$ este atras de $\mathbf{s}_R(\varepsilon(t),\ \theta(t))$; deci din teorema 6.1.2

$$\psi_R(\varepsilon(t),\ \theta(t)) \leqslant \psi(t)$$

și deci $I \leqslant 0$, q.e.d.

Scanned with OKEN Scanner

§2. Răspuns instantaneu pentru materiale cu comportare de tip rate. Cazul unidimensional

Vom considera următorul sistem de forme diferențiale

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{1}{\rho_0}\sigma d\varepsilon - \eta\, d\theta, \\ d\sigma &= b_1(\mathbf{s})\, d\varepsilon + b_2(\mathbf{s})\, d\theta + b_3(\mathbf{s})\, dg. \\ d\eta &= c_1(\mathbf{s})\, d\varepsilon + c_2(\mathbf{s})\, d\theta + c_3(\mathbf{s})\, dg, \\ dk &= d_1(\mathbf{s})\, d\varepsilon + d_2(\mathbf{s})\, d\theta + d_3(\mathbf{s})\, dg, \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

obținut din (6.1.3) prin înlăturarea termenilor cu indice 4 și folosirea relațiilor (6.1.5).

Vom spune că *materialul posedă răspuns instantaneu de la starea* $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{D}$ *dacă sistemul de forme diferențiale* (6.2.1) *este complet integrabil.* Vom spune că materialul posedă răspuns instantaneu în $\mathcal{D}$ dacă el posedă răspuns instantaneu pornind de la orice stare $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{D}$.

Un sistem de forme diferențiale se spune că este complet integrabil într-un punct $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{D}$ dacă există o vecinătate $U_{\mathbf{s}_0} \subset R \times R \times R \times \mathcal{D}$ a punctului $(\varepsilon_0, \theta_0, g_0, \mathbf{s}_0)$ și funcțiile σ_I, ψ_I, η_I, k_I: $U_{\mathbf{s}_0} \to R \cap \mathcal{D}$ astfel încît

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_I(\varepsilon, \theta, g, \mathbf{s}_0), \\ \sigma &= \sigma_I(\varepsilon, \theta, g, \mathbf{s}_0), \\ \eta &= \eta_I(\varepsilon, \theta, g, \mathbf{s}_0), \\ k &= k_I(\varepsilon, \theta, g, \mathbf{s}_0), \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

verifică (6.2.1) pentru orice curbă $(\varepsilon(t), \theta(t), g(t))$ de clasă C^{01} cu $t \geqslant 0$ și suficient de aproape de 0 și $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $g(0) = g_0$. În plus $\psi_I(\varepsilon_0, \theta_0, g_0, \mathbf{s}_0) = \psi_0, \ldots, k_I(\varepsilon_0, \theta_0, g_0, \mathbf{s}_0) = k_0$ (vezi de exemplu Hartman [1964] Cap. VI, partea 1).

Teorema 6.2.1. Dacă funcțiile b_i, c_i, d_i, $i = 1, 2, 3$ sînt de clasă C^1 pe $\mathcal{D}$ atunci o condiție necesară și suficientă ca materialul cu comportare de tip rate să posede răspuns instantaneu de la orice stare $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{D}$ este ca următoarele relații

să fie satisfăcute (pentru demonstrație vezi Hartman [1964], Cap. VI, partea 1)

$$b_3(\mathbf{s}_0) = 0,$$

$$c_3(\mathbf{s}_0) = 0, \tag{6.2.3}$$

$$b_2(\mathbf{s}_0) = -c_1(\mathbf{s}_0),$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial g} + \frac{\partial b_1}{\partial k} d_3 = 0;$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial g} + \frac{\partial b_2}{\partial k} d_3 = 0, \tag{6.2.4}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial g} + \frac{\partial c_1}{\partial k} d_3 = 0,$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial g} + \frac{\partial c_2}{\partial k} d_3 = 0,$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \theta} + b_2 \frac{\partial b_1}{\partial \sigma} - \eta \frac{\partial b_1}{\partial \psi} + c_2 \frac{\partial b_1}{\partial \eta} + d_2 \frac{\partial b_1}{\partial k} =$$

$$= \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} + b_1 \frac{\partial b_2}{\partial \sigma} + \sigma \frac{\partial b_2}{\partial \psi} + c_1 \frac{\partial b_2}{\partial \eta} + d_1 \frac{\partial b_2}{\partial k}, \tag{6.2.5}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial \theta} + b_2 \frac{\partial c_1}{\partial \sigma} - \eta \frac{\partial c_1}{\partial \psi} + c_2 \frac{\partial c_1}{\partial \eta} + d_2 \frac{\partial c_1}{\partial k} =$$

$$= \frac{\partial c_2}{\partial \varepsilon} + b_1 \frac{\partial c_2}{\partial \sigma} + \sigma \frac{\partial c_2}{\partial \psi} + c_1 \frac{\partial c_2}{\partial \eta} + d_1 \frac{\partial c_2}{\partial k},$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial \theta} + \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} b_2 - \eta \frac{\partial d_1}{\partial \psi} + c_2 \frac{\partial d_1}{\partial \eta} + d_2 \frac{\partial d_1}{\partial k} =$$

$$= \frac{\partial d_2}{\partial \varepsilon} + b_1 \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} + \sigma \frac{\partial d_2}{\partial \psi} + c_1 \frac{\partial d_2}{\partial \eta} + d_1 \frac{\partial d_2}{\partial k}, \tag{6.2.6}$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial g} + d_3 \frac{\partial d_1}{\partial k} = \frac{\partial d_3}{\partial \varepsilon} + b_1 \frac{\partial d_3}{\partial \sigma} + \sigma \frac{\partial d_3}{\partial \psi} + c_1 \frac{\partial d_3}{\partial \eta} + d_1 \frac{\partial d_3}{\partial k}, \tag{6.2.7}$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial g} + d_3 \frac{\partial d_2}{\partial k} = \frac{\partial d_3}{\partial \theta} + b_2 \frac{\partial d_3}{\partial \sigma} - \eta \frac{\partial d_3}{\partial \psi} + c_2 \frac{\partial d_3}{\partial \eta} + d_2 \frac{\partial d_3}{\partial k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile $(6.2.3)_{1,2}$ ne spun că în cazul cînd materialul posedă răspuns instantaneu, creşterile tensiunii şi entropiei nu depind de creşterile gradientului temperaturii.

Relaţiile (6.2.4) ne arată că dacă $d_3 \neq 0$ atunci b_1, b_2, c_1, c_2 trebuie să depindă sau să nu depindă de g şi k în acelaşi timp. Din (6.2.4) şi (6.2.7) urmează că dacă $d_3 = 0$ atunci $b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ nu depind de g.

Corolar 6.2.1. Dacă condiţiile teoremei 6.2.1 sînt satisfăcute, atunci sînt adevărate următoarele relaţii

$$\psi = \psi_I(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0), \tag{6.2.8}$$

$$\sigma = \sigma_I(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0) = \rho_0 \frac{\partial \psi_I}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0), \tag{6.2.9}$$

$$\eta = \eta_I(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0) = -\frac{\partial \psi_I}{\partial \theta}(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0), \tag{6.2.10}$$

$$\begin{aligned}
b_1(\varepsilon, \theta, g; \sigma_I, \psi_I, \eta_I, k_I) &= \frac{\partial \sigma_I}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0) = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_I}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0), \\
b_2(\varepsilon, \theta, g; \sigma_I, \psi_I, \eta_I, k_I) &= \frac{\partial \sigma_I}{\partial \theta}(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0) = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_I}{\partial \theta \partial \varepsilon}(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0), \\
c_1(\varepsilon, \theta, g; \sigma_I, \psi_I, \eta_I, k_I) &= \frac{\partial \eta_I}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0) = -\frac{\partial^2 \psi_I}{\partial \theta \partial \varepsilon}(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0), \\
c_2(\varepsilon, \theta, g; \sigma_I, \psi_I, \eta_I, k_I) &= \frac{\partial \eta_I}{\partial \theta}(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0) = -\frac{\partial^2 \psi_I}{\partial \theta^2}(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0).
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

În condiţiile teoremei 6.2.1 iacobianul aplicaţiei

$$(\sigma_0, \psi_0, \eta_0, k_0) \to (\sigma_I(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0), \psi_I(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0), \eta_I(\varepsilon, \theta, \mathbf{s}_0), k_I(\varepsilon, \theta, g, \mathbf{s}_0))$$

este nenul pentru orice (ε, θ, g) suficient de aproape de $(\varepsilon_0, \theta_0, g_0)$ deoarece pentru $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\theta = \theta_0$, $g = g_0$ acest iacobian este 1. Notăm cu B_0 domeniul tridimensional conţinînd punctul $(\varepsilon_0, \theta_0, g_0)$ pentru care $\sigma_I, \psi_I, \eta_I, k_I$ sînt definiţi şi iacobianul de mai sus este diferit de zero. Acum putem enunţa următoarea propoziţie.

Propoziţia 6.2.1. Dacă materialul cu comportare de tip rate posedă răspuns instantaneu şi condiţiile teoremei 6.2.1

Scanned with OKEN Scanner

sînt satisfăcute atunci pentru orice stare $s_0 \in \mathcal{D}$ și orice traiectorie $\tau = (\varepsilon, \theta, g): [0, T] \to R^3$, $\tau \in \mathbf{R}^1$ astfel încît $\tau(0) = (\varepsilon_0, \theta_0, g_0)$ iar $\tau^+(0) = \tau(0+0) \in B_0$ există cel puțin un proces termodinamic de durată $\tau_s > 0$, $s \in \mathbf{R}^1$ care satisface ecuațiile: (pentru definiția lui $\mathbf{R}^1$ vezi cap. IV §3)

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi} - \frac{1}{\rho_0}\sigma\dot{\varepsilon} + \eta\dot{\theta} = a_4(s),\\
&\dot{\sigma} - b_1(s)\,\dot{\varepsilon} - b_2(s)\,\dot{\theta} = b_4(s),\\
&\dot{\eta} - c_1(s)\,\dot{\varepsilon} - c_2(s)\,\dot{\theta} = c_4(s),\\
&\dot{k} - d_1(s)\,\dot{\varepsilon} - d_2(s)\,\dot{\theta} - d_3(s)\,\dot{g} = d_4(s),
\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

pentru $t \in [0, T_s]$ cu excepția unei mulțimi cel mult numărabile de puncte iar în punctele de discontinuitate ecuațiile sînt satisfăcute de către limitele laterale ale funcțiilor și derivatelor respective.

Demonstrație Se folosește metoda variației constantelor ca pentru cazul cînd influența termodinamică este neglijată (vezi §3 și Suliciu [1973, 1974 c]). Se construiesc funcțiile

$$\begin{aligned}
&\psi(t) = \psi_I(\varepsilon(t), \theta(t); \varepsilon_0, \theta_0, g_0, \bar{\sigma}, \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{k}),\\
&\sigma(t) = \sigma_I(\varepsilon(t), \theta(t); \varepsilon_0, \theta_0, g_0, \bar{\sigma}, \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{k}),\\
&\eta(t) = \eta_I(\varepsilon(t), \theta(t); \varepsilon_0, \theta_0, g_0, \bar{\sigma}, \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{k}),\\
&k(t) = k_I(\varepsilon(t), \theta(t), g(t); \varepsilon_0, \theta_0, g_0, \bar{\sigma}, \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{k}),
\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

care verifică ecuațiile (6.2.12) fără membrii din dreapta a_4, b_4, c_4, d_4 pentru $\bar{\sigma}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{k}$ constante. Vom considera $\bar{\sigma}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{k}$ funcții de t și le vom determina astfel ca ecuațiile (6.2.12) să fie verificate cînd membrul drept există. Aceste funcții pot fi

Scanned with OKEN Scanner

determinate ca funcții de clasă C^{01} și vor fi soluții ale următoarei probleme inițiale:

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial \sigma_0}\dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \psi_I}{\partial \psi_0}\dot{\bar{\psi}} + \frac{\partial \psi_I}{\partial \eta_0}\dot{\bar{\eta}} + \frac{\partial \psi_I}{\partial k_0}\dot{\bar{k}} = a_4(\varepsilon, \theta, g, \sigma_I, \psi_I, \eta_I, k_I)$$

$$\frac{\partial \sigma_I}{\partial \sigma_0}\dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \sigma_I}{\partial \psi_0}\dot{\bar{\psi}} + \frac{\partial \sigma_I}{\partial \eta_0}\dot{\bar{\eta}} + \frac{\partial \sigma_I}{\partial k_0}\dot{\bar{k}} = b_4(\varepsilon, \theta, g, \sigma_I, \psi_I, \eta_I, k_I)$$

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial \sigma_0}\dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \eta_I}{\partial \psi_0}\dot{\bar{\psi}} + \frac{\partial \eta_I}{\partial \eta_0}\dot{\bar{\eta}} + \frac{\partial \eta_I}{\partial k_0}\dot{\bar{k}} = c_4(\varepsilon, \theta, g, \sigma_I, \psi_I, \eta_I, k_I) \tag{6.2.14}$$

$$\frac{\partial k_I}{\partial \sigma_0}\dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial k_I}{\partial \psi_0}\dot{\bar{\psi}} + \frac{\partial k_I}{\partial \eta_0}\dot{\bar{\eta}} + \frac{\partial k_I}{\partial k_0}\dot{\bar{k}} = d_4(\varepsilon, \theta, g, \sigma_I, \psi_I, \eta_I, k_I)$$

$$\bar{\sigma}(0) = \sigma_I(\varepsilon^+(0), \theta^+(0), \mathbf{s}_0), \quad \bar{\psi}(0) = \psi_I(\varepsilon^+(0), \theta^+(0), \mathbf{s}_0),$$

$$\bar{\eta}(0) = \eta_I(\varepsilon^+(0), \theta^+(0), \mathbf{s}_0), \quad \bar{k}(0) = k_I(\varepsilon^+(0), \theta^+(0), g^+(0), \mathbf{s}_0).$$

Deoarece matricea coeficienților lui $\dot{\bar{\sigma}}, \dot{\bar{\psi}}, \dot{\bar{k}}, \dot{\bar{\eta}}$ are determinantul diferit de zero (deoarece $\tau^+(0) \in B_0$) urmează că există o soluție unică de clasă C^{01} a acestei probleme pe un interval $[0, T_s], 0 < T_s \leqslant T$.

Între materialele de tip rate care posedă răspuns instantaneu și materialele cu variabile interne de stare (vezi Cap. V) există o legătură strînsă. Dacă de exemplu starea $\mathbf{s}_0$ este fixată, fie această stare de forma $\mathbf{s}_0 = (\varepsilon_0, \theta_0, g_0 = 0, \sigma_0, \psi_0, \eta_0, k_0)$ atunci cantitățile $(\bar{\sigma}, \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{k}) = \boldsymbol{\alpha}$ pot fi privite ca variabile interne de stare iar ecuațiile (6.2.14) pot fi privite ca ecuații de evoluție pentru aceste variabile, deoarece în vecinătatea stării $\mathbf{s}_0$ iacobianul $\mathbf{J}$ al transformării $(\bar{\sigma}, \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{k}) \to (\sigma_I, \psi_I, \eta_I, k_I)$ este diferit de zero. Funcția $\mathbf{f}$ din (5.1.7) este determinată de $\mathbf{J}^{-1} * \mathbf{a} = \mathbf{f}$ unde $\mathbf{a} = (a_4, b_4, c_4, d_4)$. Starea $\mathbf{s}_0$ este o stare de echilibru în sensul lui (5.2.2) dacă $\mathbf{a}(\mathbf{s}_0) = \mathbf{0}$. Însă nici o stare de echilibru nu poate fi o stare de echilibru tare (în sensul lui (5.2.3) unde se identifică $\hat{\psi}$ cu ψ_I) deoarece $\det \mathbf{J} \neq 0$, ceea ce nu permite ca derivatele lui ψ_I în raport cu $\bar{\sigma}, \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{k}$ să fie nule în același timp.

Deoarece

$$\mathbf{f}_\alpha = -\mathbf{J}^{-1} * (\mathbf{J}^{-1})_\alpha * \mathbf{f} + \mathbf{J}^{-1} * \mathbf{a}_\alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

urmează că într-o stare de echilibru det $\mathbf{f}_\alpha \neq 0$ dacă și numai dacă det $\mathbf{a}_\alpha \neq 0$, dar dacă $\mathbf{s}_0 = (\varepsilon_0, \theta_0, g_0 = 0, \sigma_0, \psi_0, \eta_0, k_0)$ este o stare relaxată în energie atunci inegalitatea (6.1.6) (folosind același raționament ca pentru obținerea condițiilor (5.2.8)—(5.2.10)) implică

$$\frac{\partial a_4(\mathbf{s}_0)}{\partial \sigma} = \frac{\partial a_4(\mathbf{s}_0)}{\partial \psi} = \frac{\partial a_4(\mathbf{s}_0)}{\partial \eta} = \frac{\partial a_4(\mathbf{s}_0)}{\partial k} = 0 \qquad (6.2.15)$$

și deci det $\mathbf{a}_\alpha = 0$.

Astfel toate rezultatele obținute în Cap. V pentru stări de echilibru tare nu pot fi aplicate aici.

§3. Ecuații constitutive de tip rate pentru cazul tridimensional

3.1. Spunem că starea termodinamică $\mathbf{s}$ a particulei materiale $\mathbf{X}$ a corpului $\mathcal{B}$ la timpul t este cunoscută dacă se cunosc pentru $(\mathbf{X}, t)$ următoarele cantități: $\mathbf{F}$, θ, $\mathbf{g}$, $\widetilde{\mathbf{S}}$, η, ψ, $\mathbf{k} = (1/\rho_0\theta)\mathbf{q}$ a căror semnificație fizică este descrisă în Anexa 3. Vom scrie pe scurt

$$\mathbf{s} = (\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \widetilde{\mathbf{S}}, \eta, \psi, \mathbf{k}) \in \mathcal{S} \qquad (6.3.1)$$

unde $\mathcal{S}$ este spațiul tuturor stărilor termodinamice posibile și este un subspațiu al produsului cartezian.

$$\mathcal{L}^+(R^3, R^3) \times R^+ \times R^3 \times \mathcal{L}(R^3, R^3) \times R \times R \times R^3 \supset \mathcal{S}. \qquad (6.3.2)$$

Aici $\mathcal{L}(R^3, R^3)$ este mulțimea tuturor aplicațiilor liniare definite pe R^3 cu valori în R^3, $\mathcal{L}^+(R^3, R^3) \subset \mathcal{L}(R^3, R^3)$ este mulțimea aplicațiilor liniare cu determinant pozitiv, R^+ este semidreapta pozitivă.

Pentru prescurtarea scrierii se mai introduc următoarele notații

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{F}, \theta), \quad \mathbf{f} = \left(\frac{1}{\rho_0}\widetilde{\mathbf{S}}, -\eta\right). \qquad (6.3.3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că pe $\mathcal{S}$ sînt definite următoarele funcții

$$\mathbf{a}_1, B_3 : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(R^3, R^3) \times R = \mathcal{U}, \mathbf{a}_2 : \mathcal{S} \to R^3,$$
$$a_3 : \mathcal{S} \to R, \mathbf{B}_1 : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U}), \tag{6.3.4}$$
$$\mathbf{B}_2 : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(R^3, \mathcal{U}), \mathbf{Q}_1 : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(\mathcal{U}, R^3),$$
$$\mathbf{Q}_2 : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(R^3, R^3), \mathbf{Q}_3 : \mathcal{S} \to R^3$$

și că aceste funcții sînt atît de netede cît este necesar ca operațiile făcute în continuare să aibă sens.

Ca și pentru cazul unidimensional, un proces termodinamic pentru o particulă $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ va fi o funcție $\mathbf{s}$: $[0, T_s] \to \mathcal{S}$ iar traiectorie a unui proces va fi numită o curbă $\tau = (\mathbf{Y}, \mathbf{g})$: $[0, T_\tau] \to \mathcal{U} \times R^3 \cap \mathcal{S}$, $\tau(t) = (\mathbf{Y}(t), \mathbf{g}(t))$, $t \in [0, T_\tau]$, $T_\tau \geqslant T_s > 0$. Se va spune că corpul $\mathcal{B}$ are o comportare de tip rate dacă cunoașterea stării $\mathbf{s}$ la timpul t și a derivatelor $\dot{\mathbf{Y}}(t)$ și $\dot{\mathbf{g}}(t)$ determină (cu ajutorul funcțiilor din (6.3.4)) derivatele $\dot{\psi}(t)$, $\dot{\mathbf{f}}(t)$, $\dot{\mathbf{k}}(t)$ cu ajutorul relațiilor:

$$\dot{\psi}(t) = \mathbf{a}_1(\mathbf{s}(t))\, \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{a}_2(\mathbf{s}(t))\, \dot{\mathbf{g}}(t) + a_3(\mathbf{s}(t)) \tag{6.3.5}$$

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{B}_1(\mathbf{s}(t)) * \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{B}_2(\mathbf{s}(t)) * \dot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{B}_3(\mathbf{s}(t)) \tag{6.3.6}$$

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{Q}_1(\mathbf{s}(t)) * \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{s}(t)) * \dot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{Q}_3(\mathbf{s}(t)). \tag{6.3.7}$$

Un proces termodinamic $\mathbf{s}(t)$, $t \in [0, T_s]$ se numește proces termodinamic admisibil dacă el satisface (6.3.5)—(6.3.7).

Pentru procese termodinamice admisibile se postulează inegalitatea lui Clausius-Duhem sub forma

$$\dot{\psi} - \mathbf{f}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{k}\mathbf{q} \leqslant 0 \tag{6.3.8}$$

(compară cu (5.1.8) și (A3.16)), care trebuie să fie satisfăcută pentru orice proces termodinamic admisibil.

Teorema 6.1.1 are loc și în cazul tridimensional general și avem

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{s}) = \mathbf{f} \tag{6.3.9}$$
$$\mathbf{a}_2(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$$

și

$$a_3(\mathbf{s}) + \mathbf{k}\mathbf{g} \leqslant 0. \tag{6.3.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile (6.3.9) permit ca (6.3.5) să poată fi scrisă sub forma

$$\dot{\psi}(t) = \mathbf{f}(t)\,\dot{\mathbf{Y}}(t) + a_3(\mathbf{s}(t)). \tag{6.3.11}$$

3.2. Definiția noțiunii de răspuns instantaneu este aceeași ca și pentru cazul unidimensional. A spune că materialul are răspuns instantaneu pornind de la orice stare $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{S}$ este echivalent cu a presupune că există funcțiile netede $\check{\psi}, \check{\mathbf{f}}, \check{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned} \psi &= \check{\psi}(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0), \quad \check{\psi}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0, \mathbf{s}_0) = \psi_0, \\ \mathbf{f} &= \check{\mathbf{f}}(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0), \quad \check{\mathbf{f}}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0, \mathbf{s}_0) = \mathbf{f}_0, \\ \mathbf{k} &= \check{\mathbf{k}}(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0), \quad \check{\mathbf{k}}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0, \mathbf{s}_0) = \mathbf{k}_0, \end{aligned} \tag{6.3.12}$$

unic determinate pentru orice $(\mathbf{Y}, \mathbf{g})$ într-o vecinătate $\mathcal{V}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ a lui $(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ din $\mathcal{U} \times R^3 \cap \mathcal{S}$ astfel că pentru orice traiectorie netedă pe porțiuni $(\mathbf{Y}, \mathbf{g}) : [0, T_*] \to \mathcal{U} \times R^3$, cu $(\mathbf{Y}(0), \mathbf{g}(0)) = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ următorul sistem de ecuații

$$\begin{aligned} \dot{\check{\psi}} &= \check{\mathbf{f}}\dot{\mathbf{Y}}, \\ \dot{\check{\mathbf{f}}} &= \check{\mathbf{B}}_1 * \dot{\mathbf{Y}} + \check{\mathbf{B}}_2 * \dot{\mathbf{g}}, \\ \dot{\check{\mathbf{k}}} &= \check{\mathbf{Q}}_1 * \dot{\mathbf{Y}} + \check{\mathbf{Q}}_2 * \dot{\mathbf{g}}, \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

este satisfăcut pentru toți $t \in [0, T_s]$, $0 \leqslant T_s \in [0, T_*]$ unde

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{B}}_i &= \mathbf{B}_i(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \check{\mathbf{f}}, \check{\psi}, \check{\mathbf{k}}), \quad i = 1, 2 \\ \check{\mathbf{Q}}_i &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \check{\mathbf{f}}, \check{\psi}, \check{\mathbf{k}}), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

iar $\check{\mathbf{f}}, \check{\psi}, \check{\mathbf{k}}$ sînt calculate ca funcții de t cu ajutorul lui (6.3.12) și a funcțiilor $(\mathbf{Y}(t), \mathbf{g}(t))$.

Orice punct $(\mathbf{Y}, \mathbf{g}) \in \mathcal{V}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ poate fi legat cu o traiectorie netedă $(\mathbf{Y}(t), \mathbf{g}(t)) \in \mathcal{V}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ de punctul $(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ astfel ca $(\mathbf{Y}(0), \mathbf{g}(0)) = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ și $(\dot{\mathbf{Y}}(t), \dot{\mathbf{g}}(t)) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ unde $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ este

Scanned with OKEN Scanner

un vector arbitrar în $\mathcal{U}\times R^3$. Scriind ecuația $(6.3.13)_1$ la timpul t avem

$$[\nabla_{\mathbf{Y}}\check{\psi}(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0) - \check{\mathbf{f}}(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0)]\,\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{g}}\check{\psi}(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0)\,\mathbf{v} = 0$$

de unde

$$\nabla_{\mathbf{g}}\check{\psi}(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0) = \mathbf{0}, \tag{6.3.15}$$

$$\nabla_{\mathbf{Y}}\check{\psi}(\mathbf{Y}, \mathbf{s}_0) = \check{\mathbf{f}}(\mathbf{Y}, \mathbf{s}_0). \tag{6.3.16}$$

Din (6.3.15) se vede că funcția $\check{\psi}$ nu depinde de $\mathbf{g}$ și în consecință din (6.3.16) urmează că nici $\check{\mathbf{f}}$ nu depinde de $\mathbf{g}$.

Pe aceeași cale găsim din $(6.3.13)_{2,3}$ că

$$\check{\mathbf{B}}_2(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0) = \mathbf{B}_2(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \check{\mathbf{f}}, \check{\psi}, \check{\mathbf{k}}) = \mathbf{0} \tag{6.3.17}$$

$$\check{\mathbf{B}}_1(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0) = \mathbf{B}_1(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \check{\mathbf{f}}, \check{\psi}, \check{\mathbf{k}}) = \nabla^2_{\mathbf{Y}}\check{\psi}(\mathbf{Y}, \mathbf{s}_0)$$

și

$$\check{\mathbf{Q}}_1(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0) = \mathbf{Q}_1(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \check{\mathbf{f}}, \check{\psi}, \check{\mathbf{k}}) = \nabla_{\mathbf{Y}}\check{\mathbf{k}}(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0), \tag{6.3.18}$$

$$\check{\mathbf{Q}}_2(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0) = \mathbf{Q}_2(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \check{\mathbf{f}}, \check{\psi}, \check{\mathbf{k}}) = \nabla_{\mathbf{g}}\check{\mathbf{k}}(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{s}_0).$$

Dacă în $(6.3.17)_1$ facem $(\mathbf{Y}, \mathbf{g}) = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ atunci ținînd seama de (6.3.12) avem

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{s}_0) = \mathbf{0}. \tag{6.3.19}$$

Cum $\mathbf{s}_0$ a fost ales arbitrar în $\mathcal{S}$ urmează că pentru materialele cu răspuns instantaneu relația (6.3.19) are loc peste tot în $\mathcal{S}$. Acest rezultat este de tipul rezultatelor (5.1.20) și (5.1.21) obținute pentru materialele cu variabile interne de stare. Din $(6.3.17)_2$ se observă că $\check{\mathbf{B}}_1$ nu depinde de $\mathbf{g}$ deoarece el este determinat în lungul hipersuprafeței de răspuns instantaneu de către funcția $\nabla^2_{\mathbf{Y}}\check{\psi}(\mathbf{Y}, \mathbf{s}_0)$. Tot din $(6.3.17)_2$ prin derivare în raport cu $\mathbf{g}$ și ținînd seama de (6.3.12) și $(6.3.18)_2$ pentru $(\mathbf{Y}, \mathbf{g}) = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ se obține că

$$\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{B}_1(\mathbf{s}_0) + \{\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{B}_1(\mathbf{s}_0)\}\{\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{Q}_2(\mathbf{s}_0)\} = \mathbf{0} \tag{6.3.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

egalitate valabilă ca și (6.3.19) pentru orice $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{S}$. Se vede că $\mathbf{B}_1$ nu depinde de $\mathbf{g}$ dacă și numai dacă al doilea termen din membrul stîng al lui (6.3.20) este zero.

Faptul că materialul posedă sau nu răspuns instantaneu poate fi caracterizat prin condiții puse direct asupra coeficienților din ecuațiile (6.3.13). Pentru a simplifica descrierea vom introduce următoarele notații

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \psi \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1, & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{f}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_1, & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}. \tag{6.3.21}$$

Cu aceste notații sistemul (6.3.13) se scrie

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{D}(\mathbf{s}) * \dot{\mathbf{Z}} \tag{6.3.22}$$

unde evident $\mathbf{s} = (\mathbf{Z}, \mathbf{W}) \in \mathcal{S}$.

Pentru caracterizarea răspunsului instantaneu avem următoarea teoremă (vezi Hartman [1964] Cap. VI part. 1): dacă matricea $\mathbf{D}$ este de clasă C^1 pe $\mathcal{S}$ atunci o condiție necesară și suficientă ca materialul să posede răspuns instantaneu este ca

$$\frac{\partial D_{ki}}{\partial Z_j} + \frac{\partial D_{ki}}{\partial W_l} D_{lj} = \frac{\partial D_{kj}}{\partial Z_i} + \frac{\partial D_{kj}}{\partial W_l} D_{li} \tag{6.3.23}$$

În formula (6.3.23) după indicele l care se repetă se sumează.

Din formula (6.3.23) dacă se alege indicele $k = 5$ (adică indicele liniei care conține pe $\mathbf{f}$) și se ține seama și de (6.3.19) se găsește că

$$B_1^{ij}(\mathbf{s}) = \mathbf{B}_1^{ji}(\mathbf{s}) \tag{6.3.24}$$

adică matricea $\mathbf{B}_1$ este simetrică. Același rezultat se poate obține și direct din $(6.3.17)_2$ ținînd seama că $\mathbf{B}_1$ se exprimă cu ajutorul derivatelor parțiale de ordinul doi ale lui $\check{\psi}$.

Rezumînd cele obținute pînă acum pentru materialele cu comportare de tip rate care posedă răspuns instantaneu

Scanned with OKEN Scanner

concludem că ecuațiile constitutive (6.3.5)—(6.3.7) pot fi scrise sub forma

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(t) &= \mathbf{f}(t)\,\dot{\mathbf{Y}}(t) + a_3(\mathbf{s}(t)) \\
\dot{\mathbf{f}}(t) &= \mathbf{B}_1(\mathbf{s}(t)) * \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{s}(t)) \\
\dot{\mathbf{k}}(t) &= \mathbf{Q}_1(\mathbf{s}(t)) * \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{s}(t)) * \dot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{Q}_3(\mathbf{s}(t))
\end{aligned} \tag{6.3.25}$$

unde funcțiile $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{Q}_1$ și $\mathbf{Q}_2$ sînt supuse condițiilor (6.3.23).

Pentru o stare $\mathbf{s}_0$ fixată dacă sînt satisfăcute condițiile (6.3.23) atunci există funcțiile $\check{\psi}$, $\check{\mathbf{f}}$ și $\check{\mathbf{k}}$ din (6.3.12) într-o vecinătate $\mathcal{V}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$. Dacă luăm $(\mathbf{Y}(t), \mathbf{g}(t)) \in \mathcal{V}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ pentru $t \in [0, T_s]$ cu $(\mathbf{Y}(0), \mathbf{g}(0)) = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0)$ și dacă în locul condițiilor inițiale $(\mathbf{f}_0, \psi_0, \mathbf{k}_0)$ punem un vector $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t)$ atunci (6.3.12) poate fi scris astfel

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \check{\psi}(\mathbf{Y}(t), \mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha}(t)) \\
\mathbf{f}(t) &= \check{\mathbf{f}}(\mathbf{Y}(t), \mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha}(t)) \\
\mathbf{k}(t) &= \check{\mathbf{k}}(\mathbf{Y}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha}(t)).
\end{aligned} \tag{6.3.26}$$

Vectorul necunoscut $\boldsymbol{\alpha}(t)$ va fi determinat astfel ca funcțiile de timp $\psi(t)$, $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{k}(t)$ împreună cu $\mathbf{Y}(t)$ și $\mathbf{g}(t)$ să verifice (6.3.25). Ținînd seama de relațiile (6.3.17) și (6.3.18) pentru $\boldsymbol{\alpha}(t)$ se obține următorul sistem de ecuații

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha}\check{\psi}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha})\,\dot{\boldsymbol{\alpha}} &= a_3(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \check{\mathbf{f}}, \check{\psi}, \check{\mathbf{k}}) \\
\nabla_{\alpha}\check{\mathbf{f}}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha})\,\dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \mathbf{B}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \check{\mathbf{f}}, \check{\psi}, \check{\mathbf{k}}) \\
\nabla_{\alpha}\check{\mathbf{k}}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha})\,\dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \mathbf{Q}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \check{\mathbf{f}}, \check{\psi}, \check{\mathbf{k}}),
\end{aligned} \tag{6.3.27}$$

cu următoarele condiții inițiale

$$\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0 = (\mathbf{f}_0, \psi_0, \mathbf{k}_0), \quad (\mathbf{Y}(0), \mathbf{g}(0)) = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0) \tag{6.3.28}$$

La fel ca și pentru cazul unidimensional ecuația (6.3.27) poate fi pusă și sub forma

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{h}(\mathbf{Y}, \mathbf{g}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha}). \tag{6.3.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare $\boldsymbol{\alpha}$ pot fi considerați ca variabile interne de stare și aceleași concluzii ca pentru cazul unidimensional pot fi trase (vezi §2).

După cum s-a văzut, materialele de tip rate cu răspuns instantaneu pot fi considerate cel puțin local ca fiind o subclasă a materialelor cu variabile interne de stare. Poate fi formulată și o afirmație reciprocă și anume: Dacă dimensiunea N (vezi (5.1.2)) a spațiului variabilelor interne nu depășește 9 și dacă din (5.1.3)—(5.1.6) poate fi explicitat $\boldsymbol{\alpha}$ ca funcție de ψ, η, $\mathbf{S}$ și $\mathbf{q}$ atunci sistemul de ecuații constitutive (5.1.3)—(5.1.7) poate fi exprimat ca un sistem de ecuații constitutive de tip rate care nu conține $\boldsymbol{\alpha}$. În general însă cele două clase de materiale nu sînt subclase una alteia.

§4. Stări total relaxate

Spunem că o stare $\mathbf{s}^* = (\mathbf{Y}^*, \mathbf{g}^* = \mathbf{0}, \mathbf{f}^*, \psi^*, \mathbf{k}^*) \in \mathcal{S}$ este total relaxată dacă

$$a_3(\mathbf{s}^*) = 0, \quad B_3(\mathbf{s}^*) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}_3(\mathbf{s}^*) = \mathbf{0}. \tag{6.4.1}$$

În §1 s-a introdus noțiunea de stare relaxată în energie (vezi (6.1.8)); pentru ca o stare $\mathbf{s}^*$ să fie total relaxată se cere în plus ca $(6.4.1)_{2,3}$ să fie satisfăcută.

Din (6.3.10) și $(6.4.1)_1$ urmează că la o stare relaxată în energie avem

$$\frac{\partial a_3}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{s}^*) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial a_3}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{s}^*) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial a_3}{\partial \psi}(\mathbf{s}) = 0$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{s}^*) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial a_3}{\partial \mathbf{g}}(\mathbf{s}^*) + \mathbf{k}^* = \mathbf{0}. \tag{6.4.2}$$

Deci la o stare relaxată în energie, avem $\mathbf{k}^* = \mathbf{0}$ dacă și numai dacă $(\partial a_3/\partial \mathbf{g})(\mathbf{s}^*) = \mathbf{0}$.

O suprafață regulată Σ_R de ecuație $\psi = a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})$ este o suprafață regulată de relaxare totală dacă ea are următoarele proprietăți:

(R_1)
$$\begin{aligned} &a_3(\mathbf{Y}, \mathbf{0}, \mathbf{f}, a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}), \mathbf{k}) = 0, \\ &\mathbf{B}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{0}, \mathbf{f}, a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}), \mathbf{k}) = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{Q}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{0}, \mathbf{f}, a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}), \mathbf{k}) = \mathbf{0}; \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

și $a_3(\mathbf{Y}, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}) \neq 0$ în vecinătatea suprafeței Σ_R, pentru $\psi \neq a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})$.

(R_2) există o funcție continuă $g: R \to R^+$ astfel încît

$$g(u) = 0 \quad \text{dacă și numai dacă} \quad u = 0 \tag{6.4.4}$$

și în vecinătatea lui Σ_R

$$\begin{aligned} &a_3 - \beta < -g(\psi - a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})) \quad \text{pentru} \quad \psi > a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}) \\ &g(\psi - a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})) < a_3 - \beta \quad \text{pentru} \quad \psi < a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}) \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

unde

$$\begin{aligned} \beta = \nabla_f a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})\, \mathbf{B}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}) + \\ + \nabla_k a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})\, \mathbf{Q}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}) \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

(R_3) pentru orice $\bar{\psi}$ fixat, $a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}) = \bar{\psi}$ este o suprafață închisă $\Sigma_{\mathcal{K}}$ în $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \times R^3$ și în vecinătatea lui Σ_R

$$\beta(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}) < 0 \quad \text{pentru} \quad \psi \neq a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}). \tag{6.4.7}$$

Cum se poate vedea direct, cele două definiții ale suprafețelor de relaxare (din acest paragraf și din §1) sînt diferite. Diferența principală nu este acea formală că una se referă la stări total relaxate iar alta la stări relaxate numai în energie. Diferența principială constă în faptul că definiția din §1 încearcă o generalizare, pornind de la materialele vîscoelastice (cu memorie amortizată, vezi de exemplu Truesdell și Noll [1965] sect. 96bis), care să includă proprietățile vîscoplastice. Definiția din acest paragraf încearcă introducerea unei noțiuni de suprafață de relaxare care să generalizeze într-un fel rezultatele obținute în Cap. IV §1.

O stare $\mathbf{s}_0 = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{f}_0, \psi_0, \mathbf{k}_0)$ se spune că este total atrasă de starea $\mathbf{s}_1 = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{g}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{f}_1, \psi_1, \mathbf{k}_1)$ dacă

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_1, \mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_1 = \mathbf{0} \tag{6.4.8}$$

și dacă procesul admisibil $\mathbf{s}(t)$ care începe în $\mathbf{s}_0$ (adică $\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}_0$) și este generat de traiectoria

$$\tau(t) = \tau_0 = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0 = \mathbf{0}) \quad \text{pentru} \quad t \geqslant 0 \tag{6.4.9}$$

și $a_3(\mathbf{Y}, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}) \neq 0$ în vecinătatea suprafeței Σ_R, pentru $\psi \neq a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})$.

(R_2) există o funcție continuă $g: R \to R^+$ astfel încît

$$g(u) = 0 \quad \text{dacă și numai dacă} \quad u = 0 \tag{6.4.4}$$

și în vecinătatea lui Σ_R

$$\begin{aligned} &a_3 - \beta < -g(\psi - a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})) \quad \text{pentru} \quad \psi > a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}) \\ &g(\psi - a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})) < a_3 - \beta \quad \text{pentru } \psi < a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}) \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

unde

$$\begin{aligned} \beta = {} & \nabla_f a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})\, \mathbf{B}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}) + \\ & + \nabla_k a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})\, \mathbf{Q}_3(\mathbf{Y}, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}) \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

(R_3) pentru orice $\bar{\psi}$ fixat, $a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}) = \bar{\psi}$ este o suprafață închisă $\Sigma_{\mathcal{R}}$ în $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \times R^3$ și în vecinătatea lui Σ_R

$$\beta(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}) < 0 \quad \text{pentru} \quad \psi \neq a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}). \tag{6.4.7}$$

Cum se poate vedea direct, cele două definiții ale suprafețelor de relaxare (din acest paragraf și din §1) sînt diferite. Diferența principală nu este acea formală că una se referă la stări total relaxate iar alta la stări relaxate numai în energie. Diferența principială constă în faptul că definiția din §1 încearcă o generalizare, pornind de la materialele vîscoelastice (cu memorie amortizată, vezi de exemplu Truesdell și Noll [1965] sect. 96bis), care să includă proprietățile vîscoplastice. Definiția din acest paragraf încearcă introducerea unei noțiuni de suprafață de relaxare care să generalizeze într-un fel rezultatele obținute în Cap. IV §1.

O stare $\mathbf{s}_0 = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{f}_0, \psi_0, \mathbf{k}_0)$ se spune că este total atrasă de starea $\mathbf{s}_1 = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{g}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{f}_1, \psi_1, \mathbf{k}_1)$ dacă

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_1, \mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_1 = \mathbf{0} \tag{6.4.8}$$

și dacă procesul admisibil $\mathbf{s}(t)$ care începe în $\mathbf{s}_0$ (adică $\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}_0$) și este generat de traiectoria

$$\tau(t) = \tau_0 = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0 = \mathbf{0}) \quad \text{pentru} \quad t \geqslant 0 \tag{6.4.9}$$

satisface condițiile

$$\psi(t) = \psi_1$$
$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_1 \quad \text{pentru } t \geqslant t_1, \qquad (6.4.10)$$
$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}_1$$

pentru un $t_1 \geqslant 0$, (t_1 poate fi infinit).

Acum avem toate elementele pentru a demonstra teorema care urmează

Teorema 6.4.1 Fie Σ_R: $\psi = a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})$ o suprafață regulată de relaxare totală. Considerăm cilindrul U cu generatoarele paralele cu axa ψ și trecînd prin suprafața Σ'_R: : $a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}) = \psi_1$ și cu fețele de jos și de sus determinate de suprafețele

$$\Sigma_- : \psi - a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}) = \gamma_-,$$
$$\Sigma_+ : \psi - a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k}) = \gamma_+ \quad \text{(vezi fig. 6.4.1)}$$

unde γ_- și γ_+ sînt două numere astfel încît $\gamma_- < 0 < \gamma_+$. În plus presupunem că: (i) a_3, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{Q}_3$ și β sînt funcții de clasă C^1 pe $\overline{U} - \Sigma_R$ și continue pe $\overline{U}$, (ii) $1/g(u)$ este integrabilă (Lebesgue) pe $[0, \gamma_+]$ și pe $[\gamma_-, 0]$. Atunci pentru orice stare

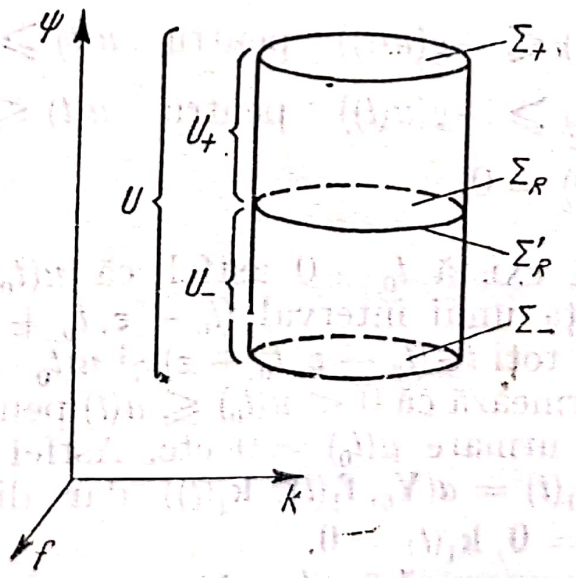


Fig. 6.4.1.

$\mathbf{s}_0 \in U - \Sigma_R$ există o stare unică $\mathbf{s}_1 \in \Sigma_R$ de care $\mathbf{s}_0$ este total atrasă; dacă $\mathbf{s}_0 \in \Sigma_R \cap U$ atunci starea $\mathbf{s}_0$ rămîne acolo pentru toți $t \in [0, \infty)$, și timpul t_1 necesar pentru ca $\mathbf{s}_0$ să ajungă în $\mathbf{s}_1$ este finit.

Remarca 6.4.1 Starea finală $(\mathbf{Y}_0, \mathbf{g}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{f}_1, \psi_1, \mathbf{k}_1)$ nu este în mod necesar determinată de $\mathbf{Y}_0$, adică nu avem $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_R(\mathbf{Y}_0)$, $\psi_1 = \psi_R(\mathbf{Y}_0)$, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_R(\mathbf{Y}_0)$ (ceea ce înseamnă că materialul nu este în mod necesar semielastic în sensul lui Noll [1972]).

Demonstrația teoremei: Prima dată presupunem că $\mathbf{s}_0 \in \in \Sigma_R \cap U$. Atunci sistemul

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= a_3(\mathbf{Y}_0, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}), \quad \psi(0) = \psi_0, \\ \dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{B}_3(\mathbf{Y}_0, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}), \quad \mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0, \\ \dot{\mathbf{k}} &= \mathbf{Q}_3(\mathbf{Y}_0, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}), \quad \mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0, \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

obținut din (6.3.24) are soluția unică $\psi(t) = \psi_0$, $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0$, $\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}_0$ pentru toți $t \geqslant 0$. Presupunem că există o altă soluție $\psi = \psi_1(t)$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1(t)$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1(t)$ cu $\psi_1(0) = \psi_0$, $\mathbf{f}_1(0) = \mathbf{f}_0$, $\mathbf{k}_1(0) = \mathbf{k}_0$. Atunci din (R_2) (6.4.4)—(6.4.6)) cu

$$u(t) = \psi_1(t) - a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}_1(t), \mathbf{k}_1(t))$$

obținem

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &\leqslant -g(u(t)) \quad \text{pentru} \quad u(t) \geqslant 0 \\ \dot{u}(t) &\geqslant -g(u(t)) \quad \text{pentru} \quad u(t) \leqslant 0 \\ u(0) &= 0. \end{aligned}$$

Presupunem că există $t_0 > 0$ astfel că $u(t_0) > 0$. Aceasta implică existența unui interval $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, unde $u(t) > 0$ pentru toți $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ și $u(t_0 - \varepsilon) = 0$. Deoarece $\dot{u}(t) < 0$, urmează că $0 < u(t_0) \leqslant u(t)$ pentru toți $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ și prin urmare $u(t_0) = 0$ etc. Astfel soluția trebuie să satisfacă $\psi_1(t) = a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}_1(t), \mathbf{k}_1(t))$ dar din (R_1), (6.4.3): $\dot{\psi}_1(t) = 0$, $\dot{\mathbf{f}}_1(t) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{k}}_1(t) = \mathbf{0}$.

Acum presupunem că $\mathbf{s}_0 \in U - \Sigma_R$, atunci sistemul (6.4.11) are soluție unică $\mathbf{f}(t)$, $\psi(t)$, $\mathbf{k}(t)$, $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0$, $\psi(0) = \psi_0$, $\mathbf{k}(0) = \mathbf{k}_0$ și soluția rămîne în $U_+ \cup \Sigma_R$ pentru toți $t \in [0, \infty)$. Existența și unicitatea este asigurată de ipoteza (i). Dacă soluția nu ar rămîne în $U_+ \cup \Sigma_R$ ar însemna că există un $t_0 > 0$ astfel încît $(\mathbf{Y}_0, \mathbf{0}, f(t_0), \psi(t_0), \mathbf{k}(t_0)) \in \partial U_+ - \Sigma_R$ și $(\mathbf{Y}_0, \mathbf{0}, \mathbf{f}(t), \psi(t), \mathbf{k}(t)) \in U_+$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $t \in [0, t_0)$. Urmează din (R_2) că $(\mathbf{Y}_0, \mathbf{0}, \mathbf{f}(t_0), \psi(t_0), \mathbf{k}(t_0))$ nu poate fi pe fața Σ_+ deoarece

$$\dot{\psi}(t_0) - \nabla_f a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}(t_0), \mathbf{k}(t_0))\, \dot{\mathbf{f}}(t_0) - \nabla_k a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}(t_0), \mathbf{k}(t_0))\, \dot{\mathbf{k}}(t_0) =$$
$$= a_3(t_0) - \beta(t_0) < -g(\psi(t_0) - a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}(t_0), \mathbf{k}(t_0)) < 0$$

ceea ce înseamnă că unghiul dintre tangenta la curba soluție și normala la Σ_+ este mai mare decît $\pi/2$. Urmează din (R_3) că acest punct nu poate fi nici pe fața laterală a lui U_+ deoarece acolo

$$\nabla_f a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}(t_0), \mathbf{k}(t_0))\, \dot{\mathbf{f}}(t_0) + \nabla_k a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}(t_0), \mathbf{k}(t_0))\, \dot{\mathbf{k}}(t_0) =$$
$$= \nabla_f a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}(t_0), \mathbf{k}(t_0))\, \mathbf{B}_3(\mathbf{Y}_0, \mathbf{0}, \mathbf{f}(t_0), \psi(t_0), \mathbf{k}(t_0)) +$$
$$+ \nabla_k a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}(t_0), \mathbf{k}(t_0))\, \mathbf{Q}_3(\mathbf{Y}_0, \mathbf{0}, \mathbf{f}(t_0), \psi(t_0), \mathbf{k}(t_0)) = \beta(t_0) < 0.$$

Rămîne acum să arătăm că $\lim_{t\to\infty} (\mathbf{Y}_0, \mathbf{0}, \mathbf{f}(t), \psi(t), \mathbf{k}(t))$ există și este un punct pe $\Sigma_R \cap U$. Din (R_2) putem scrie

$$\dot{u}(t) \leqslant -g(u(t)),\ u(t) = \psi(t) - a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}(t), \mathbf{k}(t)) \quad (6.4.12)$$
$$u(0) = u_0 = \psi_0 - a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}_0, \mathbf{k}_0) > 0.$$

Aceasta implică $\lim_{t\to\infty} \dot{u}(t) = 0$ și $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Din (6.3.10) și (R_1) avem $a_3(\mathbf{Y}_0, \mathbf{0}, \mathbf{f}, \psi, \mathbf{k}) < 0$, deci $(6.4.11)_1$ va da $\psi(t)$ monoton descrescătoare și cum ea este și mărginită urmează că $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \psi_1$ și că $\psi_1 = \lim_{t\to\infty} a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}(t), \mathbf{k}(t))$. Pînă acum nu am făcut uz de ipoteza (ii). Pentru a arăta că $\lim_{t\to\infty} \mathbf{f}(t)$ și $\lim_{t\to\infty} \mathbf{k}(t)$ există vom arăta mai întîi că timpul necesar pentru ca starea $\mathbf{s}_0$ să ajungă pe suprafața Σ_R este finit. Din (6.4.12) și (ii) avem

$$t_1 \leqslant \int_0^{u_0} (1/g(u))\, du < \infty. \quad (6.4.13)$$

Prin urmare din unicitatea soluției avem

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= \mathbf{f}(t_1) = \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{k}(t) &= \mathbf{k}(t_1) = \mathbf{k}_1 \end{aligned} \qquad t \geqslant t_1 \quad (6.4.14)$$

și

$$\psi_1 = a(\mathbf{Y}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{k}_1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cazul $\mathbf{s}_0 \in U_-$ se tratează în același mod și cu aceasta teorema este demonstrată.

Remarca 6.4.2 Dacă funcția g din (R_2) este zero pentru $u \leqslant 0$ și dacă $a_3 = 0$, $\mathbf{B}_3 = \mathbf{0}$ și $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{0}$ pentru $\psi \leqslant a(\mathbf{Y}, \mathbf{f}, \mathbf{k})$ și dacă în plus presupunem că materialul posedă răspuns instantaneu atunci obținem ca un caz particular ecuațiile constitutive pentru materialele elasto-vîscoplastice discutate de Perzyna și Wojno [1968] (dacă se presupune că ecuația lor (6.14) este inversabilă în raport cu $^{\mathrm{P}}C$ și în (6.3) se ia ψ în locul lui χ sau se pune $\chi = \text{const}$). De asemenea poate fi obținută ca un caz particular teoria prezentată de Kestin și Rice [1970], pag. 291—294.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

Propagări de unde în materiale cu variabile interne de stare

§ 1. Introducere

1.a. Problema propagării undelor prin materiale pentru care fluxul de căldură este determinat de o ecuație constitutivă de tip Maxwell-Cattaneo a fost studiată, din diferite puncte de vedere, de mai mulți autori. În cadrul teoriilor neliniare s-a găsit în general că, fără presupuneri suplimentare, undele de accelerație nu sînt simetrice în raport cu direcția de propagare (vezi Gurtin și Pipkin [1968], Chen [1969], Suliciu [1966], Kosiński și Perzyna [1972] iar pentru discuții suplimentare vezi Suliciu [1975 b]).

Condiția ca undele de accelerație să fie simetrice apare ca o cerință de natură fizică. Această condiție a fost investigată de Suliciu [1975 b] pentru cazul unidimensional cu variabile interne de stare, în ipoteze constitutive particulare care fac ca ecuația constitutivă pentru fluxul de căldură să aibă o formă apropiată de ecuația lui Cattaneo [1948]. Condiția de simetrie împreună cu unele informații asupra stării de echilibru conduc la existența undelor de accelerație reale și simetrice în vecinătatea stării de echilibru. În aceleași ipoteze este arătat că fluxul de căldură este funcție numai de variabilele interne de stare și astfel la traversarea unei unde de șoc el nu are salturi, în plus în vecinătatea unei stări de echilibru undele de șoc se propagă cu o viteză apropiată de viteza adiabatică a sunetului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultate similare sînt găsite de Suliciu [1975 c] în cadrul teoriei generale unidimensionale a materialelor cu variabile interne de stare în ipoteza suplimentară că starea de echilibru este o stare de echilibru tare în sensul lui Truesdell [1969].

În acest capitol vor fi prezentate rezultatele obținute de Mihăilescu și Suliciu [1975] care au generalizat rezultatele de mai sus pentru teoria tridimensională a propagării undelor prin materiale cu variabile interne de stare. Modelul corpului cu variabile interne de stare este acela al lui Coleman și Gurtin [1967] prezentat în Cap. V, pentru care sînt făcute cîteva ipoteze constitutive suplimentare.

Ipoteza că fluxul de căldură nu depinde explicit de gradientul temperaturii, apropie acest model de modelul corpului cu memorie atenuată a lui Gurtin și Pipkin și de ipoteza constitutivă a lui Maxwell-Cattaneo. Ipoteza că funcția de evoluție a variabilelor interne depinde liniar de gradientul temperaturii împreună cu prima ipoteză (vezi (7.1.8)) fac ca sistemul de ecuații obținut pentru descrierea proceselor termodinamice din corp, să fie un sistem cvasiliniar. Ipotezele de simetrie a vitezelor de propagare (§ 2) și a amplitudinii mecanice a undei (§ 2) pentru corpurile cu dilatație termică nenulă la o stare de echilibru tare (condiția (7.4.7)) împreună cu condiția de elipticitate tare conduc la concluzia că în vecinătatea unei stări de echilibru tare pot exista 4 unde de accelerație reale și simetrice și că cel puțin două dintre ele sînt șocuri și salturi ale derivatelor temperaturii. Fluxul de căldură împreună cu derivatele sale în raport cu temperatura și gradientul deformației se anulează la echilibru tare. Aceasta ne permite să afirmăm că șocurile de mică amplitudine ce se propagă peste o stare de echilibru tare au vitezele de propagare apropiate de vitezele adiabatice de propagare a sunetului la acea stare de echilibru tare.

Pentru o ilustrare a rezultatelor de mai sus în ultimele două paragrafe este tratată teoria liniară și izotropă.

1.b. Majoritatea notațiilor din acest capitol coincid cu notațiile din Cap. V de aceea vor fi explicate numai notațiile și noțiunile noi introduse aici.

Pentru comoditatea scrierii ecuațiilor de mișcare ale lui Cauchy, în afara tensorului Piola-Kirchhoff **S** introdus în

Scanned with OKEN Scanner

Cap. V, § 1 se va introduce și un tensor $\tilde{\mathbf{S}}$ prin formula

$$\tilde{\mathbf{S}} = J\mathbf{T} * (\mathbf{F}^{-1})^T = \rho_0 \mathbf{S} \tag{7.1.1}$$

unde $J = \det \mathbf{F}$ și de obicei se presupune că $J > 0$.

Conservarea masei este exprimată prin

$$\rho_0 = \rho J. \tag{7.1.2}$$

Ecuațiile de conservare ale impulsului și energiei se scriu (vezi și Anexa 2)

$$\begin{gathered} \operatorname{Div} \tilde{\mathbf{S}} + \rho_0 \tilde{\mathbf{b}} = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial \tilde{S}_{ij}}{\partial X_j} + \rho_0 \tilde{b}_i = \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t}, \\ \rho_0 \dot{\psi} + \rho_0 (\dot{\theta}\eta + \theta \dot{\eta}) - \tilde{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{F}} + \operatorname{Div} \tilde{\mathbf{q}} = \rho_0 r \end{gathered} \tag{7.1.3}$$

unde

$$\tilde{\mathbf{q}} = J\mathbf{F}^{-1} * \mathbf{q}. \tag{7.1.4}$$

Legea a doua a termodinamicii (5.1.8) se poate scrie și astfel

$$-\dot{\psi} - \eta\dot{\theta} + \frac{1}{\rho_0} \tilde{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho_0 \theta} \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{g}_0 \geqslant 0 \tag{7.1.5}$$

unde

$$\mathbf{g}_0 = \operatorname{Grad} \theta = \left(\frac{\partial \theta}{\partial X_i} \right) = \mathbf{F}^T * \mathbf{g}. \tag{7.1.6}$$

Facem acum următoarele ipoteze constitutive suplimentare asupra formei funcțiilor $\hat{\mathbf{q}}$ și $\mathbf{f}$ din (5.1.6) și (5.1.7)

$$\begin{gathered} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{g}_0} (\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{A}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{g}_0 + \mathbf{b}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \end{gathered} \tag{7.1.7}$$

unde A este o aplicație liniară $N \times 3$ iar pentru funcția $\hat{\mathbf{q}}$ s-a păstrat aceeași notație ca și în (5.1.6) deși aici $\tilde{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}_0, \boldsymbol{\alpha})$.

Ipotezele constitutive (7.1.7) conduc la un sistem cvasiliniar de ecuații cu derivate parțiale pentru funcțiile necunoscute. Aceste ipoteze au fost puse, pentru cazul unidimensional de Kosiński și Perzyna [1972] și au fost investigate în contextul simetriei undelor și a ipotezei constitutive hiperbolice de conducție a căldurii a lui Cattaneo [1948], de către

Scanned with OKEN Scanner

Suliciu [1975 a, b]. Aplicînd inegalitatea (7.1.5) ecuațiilor constitutive (5.1.3)—(5.1.7), în ipoteza (7.1.7), și folosind același procedeu ca în Cap. V, § 1 ajungem la concluziile (5.1.21) și în plus

$$\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = -\rho_0 \theta \mathbf{A}^T(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) * \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha})$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha})\, \mathbf{b}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \leqslant 0. \tag{7.1.8}$$

§ 2. Unde simetrice de accelerație

O suprafață regulată Σ de ecuație $\varphi(\mathbf{X}, t) = 0$ cu $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ și $t \in R$ va fi numită undă de accelerație dacă la traversarea ei $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{F} = \operatorname{Grad}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\chi}$, θ și $\boldsymbol{\alpha}$ sînt continui dar derivatele acestora în raport cu $\mathbf{X}$ și t au salturi la traversarea lui Σ. Se va presupune că $\tilde{\mathbf{b}}$ și r nu au salturi la traversarea undei.

Condițiile de compatibilitate geometrică și cinematică ce trebuie să le satisfacă derivatele funcțiilor $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$, θ și $\boldsymbol{\alpha}$ sînt (vezi Anexa 3)

$$\left[\frac{\partial v_k}{\partial t}\right] = U^2 a_k, \quad \left[\frac{\partial F_{kl}}{\partial X_j}\right] = a_k n_l n_j, \quad \left[\frac{\partial F_{kl}}{\partial t}\right] = -U a_k n_l \tag{7.2.1}$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial t}\right] = -U\nu, \quad \left[\frac{\partial \theta}{\partial X_i}\right] = \nu n_i \tag{7.2.2}$$

$$\left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}\right] = -U\gamma_i, \quad \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial X_i}\right] = \gamma_i n_j. \tag{7.2.3}$$

În aceste formule, vectorul $\mathbf{n}$, de componente n_i, este vectorul normal la suprafața de discontinuitate la un t fixat și se numește direcția de propagare, U este viteza de propagare a suprafeței de discontinuitate Σ și avem

$$n_i = (\partial\varphi/\partial X_i)/|\operatorname{Grad}\varphi|, \quad U = -(\partial\varphi/\partial t)/|\operatorname{Grad}\varphi|. \tag{7.2.4}$$

Vectorul $\mathbf{a}$ de componente a_i se numește amplitudinea mecanică a undei, scalarul ν se numește amplitudinea termică a undei iar vectorul N dimensional $\boldsymbol{\gamma}$ se numește amplitudinea stării interne.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de (5.1.21), (7.1.1) și $(7.1.8)_1$ putem scrie următoarele formule de salt

$$[\operatorname{Div} \tilde{\mathbf{S}}]_i = \rho_0 \left\{ \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} a_k n_l n_j + \nu \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta \partial F_{ij}} n_j + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial F_{ij} \partial \alpha_k} \gamma_k n_j \right\}, \tag{7.2.5}$$

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \right] = U \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta \partial F_{ij}} a_i n_j + \nu U \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta^2} + U \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta \partial \alpha_k} \gamma_k, \tag{7.2.6}$$

$$[\operatorname{Div} \tilde{\mathbf{q}}] = \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial F_{kl}} a_k n_i n_l + \nu \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \theta} n_i + \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \alpha_k} \gamma_k n_i. \tag{7.2.7}$$

Introducînd (7.2.5) și $(7.2.1)_1$ în condiția dinamică de compatibilitate obținută din $(7.1.3)_1$ se găsește (vezi Anexa 3)

$$U^2 a_i = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} a_k n_j n_l + \nu \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta \partial F_{ij}} n_j +$$

$$+ \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial F_{ij} \partial \alpha_k} \gamma_k n_j. \tag{7.2.8}$$

Din (7.2.5), (7.2.1) și din condiția de compatibilitate dinamică obținută din $(7.1.3)_2$ avem

$$\rho_0 \theta U \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta \partial F_{ij}} a_i n_j + \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial F_{kl}} a_k n_i n_l + \rho_0 \theta U \nu \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \theta} n_i +$$

$$+ \rho_0 \theta U \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta \partial \alpha_k} \gamma_k - \rho_0 U \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \alpha_k} \gamma_k + \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \alpha_k} n_i \gamma_k = 0. \tag{7.2.9}$$

În fine, din (7.2.3), $(7.1.7)_2$ și (5.1.7) găsim

$$U \gamma_k + \nu A_{kj} n_j = 0. \tag{7.2.10}$$

Pentru o stare $(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha})$ fixată și pentru o direcție de propagare $\mathbf{n}$ dată sistemul de ecuații (7.2.8)—(7.2.10) reprezintă un sistem liniar și omogen de $N + 4$ ecuații cu $N + 4$ necunoscute $\mathbf{a}$, ν și $\boldsymbol{\gamma}$. Acest sistem de ecuații are o soluție nebanală numai dacă determinantul sistemului se anulează.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru prescurtarea scrierii introducem următoarele notații

$$Q_{ik} = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} n_j n_l, \quad v = -\rho_0 \theta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta^2} \tag{7.2.11}$$

$$P_i = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta \partial F_{ij}} n_j \tag{7.2.12}$$

$$D_i = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial F_{ij} \partial \alpha_k} A_{kp} n_j n_p, \quad E_i = \frac{\partial \tilde{q}_k}{\partial F_{il}} n_k n_l \tag{7.2.13}$$

$$z = -\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \alpha_k} A_{kp} n_i n_p, \quad \omega = \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \alpha_k} A_{kp} n_p - \rho_0 \theta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta \partial \alpha_k} A_{kp} n_p + \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \theta} n_i \tag{7.2.14}$$

$$H_{ik} = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial F_{ij} \partial \alpha_k} n_j, \quad \rho_0 \theta \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \theta \partial \alpha_k} - \rho_0 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \alpha_k} = G_k \tag{7.2.15}$$

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \alpha_k} n_i = K_k, \quad \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \theta} n_i = L, \quad A_{kj} n_j = M_k. \tag{7.2.16}$$

Cantitățile $\mathbf{Q} = (Q_{ij})$, și v/ρ_0 se numesc respectiv, tensorul acustic izotermic și capacitatea calorică la deformație constantă și variabile interne de stare constante.

Cu notațiile introduse determinantul sistemului (7.2.8) — (7.2.10) se scrie

$$\Delta = \begin{vmatrix} Q_{11}-U^2 & Q_{12} & Q_{13} & P_1 & H_{11} & \dots & H_{1N} \\ Q_{21} & Q_{22}-U^2 & Q_{23} & P_2 & H_{21} & \dots & H_{2N} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33}-U^2 & P_3 & H_{31} & \dots & H_{3N} \\ \rho_0\theta U P_1+E_1 & \rho_0\theta U P_2+E_2 & \rho_0\theta U P_3+E_3 & L-Uv & UG_1+K_1 & \dots & UG_N+K_N \\ 0 & 0 & 0 & M_1 & U & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & M_N & 0 & & U \end{vmatrix}$$

$$= U^{N-1}\{-vU^8 + \omega U^7 + (vI_{\mathbf{Q}} + z + \rho_0\theta \mathbf{PP})\, U^6 + [-\omega I_{\mathbf{Q}} + \mathbf{P}(\mathbf{E} - \rho_0\theta \mathbf{D})]\, U^5 - (vII_{\mathbf{Q}} + zI_{\mathbf{Q}} + \mathbf{DE} + \rho_0\theta I_{\mathbf{Q}}\mathbf{PP} - \tag{7.2.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$-\rho_0\theta(\mathbf{Q}*\mathbf{P})\mathbf{P})\,U^4+[\omega II_{\mathbf{Q}}+I_{\mathbf{Q}}\mathbf{P}(\rho_0\theta\mathbf{D}-\mathbf{E})+(\mathbf{Q}*\mathbf{P})\,(\mathbf{E}-$$

$$-\rho_0\theta\mathbf{D})]\,U^3+[vIII_{\mathbf{Q}}+zII_{\mathbf{Q}}+I_{\mathbf{Q}}\mathbf{DE}-(\mathbf{Q}*\mathbf{D})\mathbf{E}-$$

$$-\rho_0\theta I_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}*\mathbf{P})\,\mathbf{P}+\rho_0\theta II_{\mathbf{Q}}\mathbf{PP}+\rho_0\theta(\mathbf{Q}^2*\mathbf{P})\mathbf{P}]U^2+[-\omega III_{\mathbf{Q}}+$$

$$+II_{\mathbf{Q}}\mathbf{P}(\mathbf{E}-\rho_0\theta\mathbf{D})+I_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}*\mathbf{P})\,(\rho_0\theta\mathbf{D}-\mathbf{E})+(\mathbf{Q}^2*\mathbf{P})\,(\mathbf{E}-$$

$$-\rho_0\theta\mathbf{D})]U-zIII_{\mathbf{Q}}+I_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}*\mathbf{D})\mathbf{E}-II_{\mathbf{Q}}\mathbf{DE}-(\mathbf{Q}^2*\mathbf{D})\mathbf{E}\}=0 \tag{7.2.17}$$

unde $I_{\mathbf{Q}}$, $II_{\mathbf{Q}}$, $III_{\mathbf{Q}}$ sînt invarianții lui $\mathbf{Q}$.

Ecuația (7.2.17) pentru vitezele de propagare ale undelor de accelerație, are pe $U=0$ ca rădăcină multiplă de ordinul $N-1$ și aceasta se datorează ipotezei constitutive (5.1.7) și $(7.1.7.)_2$. Undele de accelerație pentru care $U=0$ se numesc unde staționare de accelerație.

Din punct de vedere fizic se așteaptă ca ecuația (7.2.17) să aibă rădăcini reale și simetrice, adică dacă $U=U_1$ este rădăcină atunci și $U=-U_1$ este rădăcină. Dacă în (7.2.17) termenul din acoladă care nu conține pe U nu se anulează atunci această ecuație are opt rădăcini nenule. Aceste rădăcini, în general nu sînt reale și nu sînt simetrice. În continuare vom face următoarea ipoteză constitutivă care conduce la viteze de propagare simetrice.

Ipoteza de simetrie I: Ecuația pentru vitezele de propagare a undelor de accelerație trebuie să admită rădăcini simetrice pentru orice stare $(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha})$ fixată și orice direcție de propagare $\mathbf{n}$ fixată.

Ipoteza de simetrie I este satisfăcută dacă și numai dacă condițiile

$$\begin{aligned}
&\omega=0\\
&\mathbf{P}(\mathbf{E}-\rho_0\theta\mathbf{D})=0\\
&(\mathbf{Q}*\mathbf{P})\,(\mathbf{E}-\rho_0\theta\mathbf{D})=0\\
&(\mathbf{Q}^2*\mathbf{P})\,(\mathbf{E}-\rho_0\,\theta\mathbf{D})=0
\end{aligned} \tag{7.2.18}$$

sînt îndeplinite pentru orice stare $(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha})$ și orice direcție de propagare $\mathbf{n}$. Ecuația (7.2.17) cu notația $Z=U^2$ se scrie

Scanned with OKEN Scanner

atunci

$$vZ^4 - (vI_{\mathbf{Q}} + z + \rho_0\theta\mathbf{PP})\,Z^3 + [vII_{\mathbf{Q}} + zI_{\mathbf{Q}} + \mathbf{DE} + \\ + \rho_0\theta(I_{\mathbf{Q}}\mathbf{PP} - (\mathbf{Q} * \mathbf{P})\mathbf{P})]Z^2 - [vIII_{\mathbf{Q}} + zII_{\mathbf{Q}} + I_{\mathbf{Q}}\mathbf{DE} - \\ - (\mathbf{Q} * \mathbf{D})\,\mathbf{E} + \rho_0\theta(II_{\mathbf{Q}}\mathbf{PP} - I_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} * \mathbf{P})\,\mathbf{P} + \\ + (\mathbf{Q}^2 * \mathbf{P})\mathbf{P})]\,Z + zIII_{\mathbf{Q}} - I_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} * \mathbf{D})\,\mathbf{E} + II_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{DE} + \\ + (\mathbf{Q}^2 * \mathbf{D})\,\mathbf{E} = 0. \tag{7.2.19}$$

Condițiile $(7.2.18)_{2-4}$ mai pot fi scrise și sub forma

$$\mathbf{PW} = 0$$

$$(\mathbf{Q} * \mathbf{P})\,\mathbf{W} = \mathbf{P}(\mathbf{Q} * \mathbf{W}) = 0 \tag{7.2.20}$$

$$(\mathbf{Q}^2 * \mathbf{P})\,\mathbf{W} = (\mathbf{Q} * \mathbf{P})\,(\mathbf{Q} * \mathbf{W}) = \mathbf{P}(\mathbf{Q}^2 * \mathbf{W}) = 0$$

unde $\mathbf{W} = \mathbf{E} - \rho_0\theta\mathbf{D}$. De aici rezultă că, dacă $\mathbf{P} \neq \mathbf{O}$ și $\mathbf{W} \neq \mathbf{O}$ atunci sau $\mathbf{P}$ sau $\mathbf{W}$ este vector propriu al lui $\mathbf{Q}$.

Fie $U^2 \neq 0$ o rădăcină a ecuației (7.2.19) pentru o stare $(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha})$ fixată și o normală $\mathbf{n}$ fixată. Din (7.2.10) și (7.2.16) avem

$$\gamma_k = -\frac{\nu}{U} M_k. \tag{7.2.21}$$

Dacă în (7.2.9) ținem seama de notațiile (7.2.11) — (7.2.16) și de $(7.2.18)_1$ și înlocuim pe γ_k din (7.2.21) obținem

$$(vU^2 - z)\,\nu = U(\rho_0\,\theta U\mathbf{P} + \mathbf{E})\,\mathbf{a}. \tag{7.2.22}$$

Din (7.2.8) și (7.2.21) rezultă

$$U^2 a - \mathbf{Q}\mathbf{a} = \nu\left(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{D}}{U}\right). \tag{7.2.23}$$

Facem acum o a doua ipoteză constitutivă.

Ipoteza de simetrie II: Pentru o undă (reală) de accelerație care călătorește în direcția $\mathbf{n}$ cu amplitudinea mecanică $\mathbf{a}$, U este o viteză de propagare posibilă dacă și numai dacă și $-U$ este.

Această ipoteză de simetrie este automat satisfăcută pentru un material elastic neliniar (vezi Truesdell [1961] § 2). Noi impunem restricții asupra ecuațiilor constitutive astfel

Scanned with OKEN Scanner

încît ea să fie satisfăcută pentru materialele cu variabile interne de stare.

Presupunem că ecuația (7.2.19) admite o rădăcină reală $Z_1 > 0$, atunci corespunzător acestei rădăcini ecuațiile omogene în **a** și ν (7.2.22) și (7.2.23) au soluțiile reale $(\mathbf{a}, \nu)$ și $(\mathbf{a}', \nu')$ corespunzător respectiv lui $U_1 = \sqrt{Z_1}$ și $-U_1 = -\sqrt{Z_1}$. În ipoteza de simetrie II, dacă $(\mathbf{a}, \nu)$ este soluție pentru valoarea proprie $U = U_1$ atunci $(\mathbf{a}, \tilde{\nu})$ trebuie să fie soluție pentru valoarea proprie $U = -U_1$. De aici și din (7.2.22) și (7.2.23) urmează că trebuie să avem

$$(U_1^2 v - z)(\nu - \tilde{\nu}) = 2U_1 \mathbf{E}\mathbf{a}$$
$$(\nu - \tilde{\nu})\mathbf{P} = \frac{1}{U_1}(\nu + \tilde{\nu})\mathbf{D}. \tag{7.2.24}$$

§ 3. Stări de echilibru tare. Condiția de elipticitate

3.a. O stare $(\mathbf{F}^*, \theta^*, \mathbf{g}^* = \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}^*)$ se numește stare de echilibru dacă

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{f}(\mathbf{F}^*, \theta^*, \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}^*) = \mathbf{0}. \tag{7.3.1}$$

Dacă o stare de echilibru satisface condiția suplimentară

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \alpha_k}(\mathbf{F}^*, \theta^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \mathbf{0} \tag{7.3.2}$$

atunci ea se numește stare de echilibru tare. În continuare, ori de cîte ori apare steluța ca indice superior la o cantitate va însemna că acea cantitate este calculată la echilibru tare.

Identitatea $(7.1.8)_1$ implică pentru echilibru tare

$$\tilde{\mathbf{q}}^* = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{F}^*, \theta^* \boldsymbol{\alpha}^*) = \mathbf{0} \tag{7.3.3}$$
$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^*}{\partial \theta} + \rho_0 \theta^* \mathbf{A}^{*T} * \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \theta} = \mathbf{0} \tag{7.3.4}$$
$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^*}{\partial \mathbf{F}} + \rho_0 \theta^* \mathbf{A}^{*T} * \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \mathbf{F}} = \mathbf{0} \tag{7.3.5}$$
$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^*}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \rho_0 \theta^* \mathbf{A}^{*T} * \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} = \mathbf{0} \tag{7.3.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

3.b. Inegalitatea lui Clausius-Duhem interpretată în sensul lui Coleman și Noll [1963], impune restricții importante asupra formei ecuațiilor constitutive. Pentru materiale cu variabile interne de stare aceste restricții au fost stabilite de Coleman și Gurtin [1967] (vezi de asemenea Bowen [1968], Onat [1967] și Valanis [1968].) Totuși aceste restricții permit încă ecuațiilor constitutive să fie prea generale astfel încît ele pot include efecte care sînt din punct de vedere fizic inadmisibile.

Pentru a înlătura aceste efecte nedorite, în elasticitatea neliniară există propuse în literatură o serie de așa numite inegalități apriorice. (Pentru o discuție detaliată în acest subiect vezi Truesdell și Noll [1965] §§ 51—53, 68, 90). În Cap. V, § 4 au fost discutate două tipuri de astfel de inegalități apriorice. Pentru teoria propagării undelor cea mai adecvată dintre ele este condiția de elipticitate, deoarece chiar în cazul elasticității neliniare condiția (5.4.3) nu asigură în general pozitivitatea tuturor vitezelor de propagare. În cea mai mare parte a acestui capitol va fi folosită o formă întărită a consecințelor (5.4.7), (5.4.19) și (5.4.20) a condiției de elipticitate, adică se va cere ca aceste inegalități să fie satisfăcute strict. Această condiție întărită va fi numită *condiția de elipticitate tare*. Cu utilizarea notațiilor (7.2.11) și a ipotezei $(7.1.7)_2$ *condiția de elipticitate tare se scrie*

$$Q_{ik}(\mathbf{n})\, a_i a_k > 0, \quad v > 0 \tag{7.3.7}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l} A_{ki} A_{lj} n_i n_j > 0 \tag{7.3.8}$$

și ea trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ și $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ din R^3.

Condiția $(7.3.7)_1$ ne spune că tensorul acustic izotermic $\mathbf{Q}$ este pozitiv definit iar condiția $(7.3.7)_2$ ne spune că capacitatea calorică v/ρ_0 la deformație constantă și variabile interne de stare constante este pozitivă.

3.c. Vom prezenta acum cîteva rezultate valabile la echilibru tare.

Ținînd seama de ipoteza (7.1.7), condiția (7.3.8) împreună cu (7.3.6) conduc la concluzia că la echilibru tare, z definit de $(7.2.14)_1$ este pozitiv adică

$$z^* > 0. \tag{7.3.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de simetrie $(7.2.18)_1$ scrisă la echilibru tare împreună cu (7.3.4) implică

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}^*}{\partial \theta} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta \partial \alpha_k} A^*_{ki} = 0. \tag{7.3.10}$$

Din (7.3.5) și (7.2.13) obținem

$$\mathbf{E}^* = -\rho_0 \theta^* \mathbf{D}^*. \tag{7.3.11}$$

(7.3.11) și $(7.2.20)_1$ arată că

$$\mathbf{P}^* \mathbf{D}^* = 0 \tag{7.3.12}$$

și dacă $\mathbf{P}^* \neq \mathbf{0}$ și $\mathbf{D}^* \neq \mathbf{0}$ atunci din (7.2.20) rezultă: $\mathbf{P}^*$ sau $\mathbf{D}^*$ este vector propriu al lui $\mathbf{Q}^*$.

§ 4. Unde reale de accelerație

Vom arăta că la echilibru tare în ipotezele de simetrie și elipticitate tare, toate undele de accelerație sînt reale.

Mai întîi demonstrăm că la echilibru tare în ipoteza de simetrie I și în ipoteza de elipticitate tare există o matrice simetrică $\mathbf{R} = (R_{ij})_{i,\, j=1,\, 2,\, 3,\, 4}$ astfel încît ecuația ei caracteristică

$$\det(\mathbf{R} - Z\mathbf{I}) = 0 \tag{7.4.1}$$

să coincidă cu ecuația (7.2.19). Atunci va urma că ecuația (7.2.19) are toate rădăcinile reale pentru orice direcție de propagare $\mathbf{n}$.

Alegem

$$R_{kl} = \lambda^*_k \delta_{kl,\, kl=1,\, 2,\, 3} \tag{7.4.2}$$

unde $\lambda^*_{k,\, k=1,\, 2,\, 3}$ sînt valorile proprii ale lui $\mathbf{Q}^*$. Componentele $R_{i4} = R_{4i,\, i=1,\, 2,\, 3,\, 4}$ se vor determina astfel ca ecuația (7.4.1) să coincidă cu ecuația (7.2.19). Astfel obținem

$$R_{44} = \frac{1}{v^*} (z^* + \rho_0 \theta^* \mathbf{P}^* \mathbf{P}^*) \tag{7.4.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$R_{14}^2 + R_{24}^2 + R_{34}^2 = \frac{\rho_0\theta^*}{v^*}[(\mathbf{Q}^* * \mathbf{P}^*)\,\mathbf{P}^* + \mathbf{D}^*\mathbf{D}^*]$$

$$\lambda_1^* R_{14}^2 + \lambda_2^* R_{24}^2 + \lambda_3^* R_{34}^2 = \frac{\rho_0\theta^*}{v^*}[(\mathbf{Q}^{*2} * \mathbf{P}^*)\,\mathbf{P}^* + (\mathbf{Q}^* * \mathbf{D}^*)\,\mathbf{D}^*]$$

$$\lambda_1^{*2} R_{14}^2 + \lambda_2^{*2} R_{24}^2 + \lambda_3^{*2} R_{34}^2 = \frac{\rho_0\theta^*}{v^*}[(\mathbf{Q}^{*3} * \mathbf{P}^*)\,\mathbf{P}^* + (\mathbf{Q}^{*2} * \mathbf{D}^*)\,\mathbf{D}^*]. \tag{7.4.4}$$

Dacă scriem matricea $\mathbf{Q}^*$ și vectorii $\mathbf{P}^*$ și $\mathbf{D}^*$ în baza ortonormală de vectori proprii ai lui $\mathbf{Q}^*$ atunci avem

$$R_{i4}^2 = \frac{\rho_0\theta^*}{v^*}(P_i^{*2} + \lambda_i^* D_i^{*2}), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{7.4.5}$$

unde P_i^* și D_i^* sînt componentele lui $\mathbf{P}^*$ și $\mathbf{D}^*$ în această bază.

Fie acum Z_i^*, $i = 1, 2, 3, 4$ cele patru rădăcini reale ale ecuației (7.2.19). Din $(7.3.7)_2$ și (7.3.9) obținem

$$Z_1^* + Z_2^* + Z_3^* + Z_4^* = I_{\mathbf{Q}^*} + \frac{1}{v^*}(z^* + \rho_0\theta^*\mathbf{P}^*\mathbf{P}^*) > 0. \tag{7.4.6}$$

Prin urmare cel puțin un $Z_i^* > 0$. Presupunem că $Z_1^* = U_1^{*2} > 0$. Atunci, corespunzător vitezei de propagare U_1^*, există o soluție reală $(\mathbf{a}_1^*, \nu_1^*, \gamma_1^*)$ a sistemului omogen (7.2.8) — (7.2.10).

Deoarece pentru termoelasticitatea liniară vectorul $\mathbf{P}$ este proporțional cu normala $\mathbf{n}$ iar lungimea lui este egală cu coeficientul de dilatație termică împărțit la $\rho_0\theta^*$ (vezi § 6), putem presupune că la orice stare de echilibru tare și pentru orice direcție de propagare

$$\mathbf{P}^* \neq \mathbf{0}. \tag{7.4.7}$$

Tot în termoelasticitatea liniară $\mathbf{P}$ este vector propriu al lui $\mathbf{Q}$.

Din (7.2.24) scrisă la echilibru tare și înmulțită cu $\mathbf{P}^*$, din (7.3.12) și (7.4.7.) urmează că

$$\nu_1^* = \tilde{\nu}_1^* \tag{7.4.8}$$

și

$$\nu_1^*\mathbf{D}^* = \mathbf{0}. \tag{7.4.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Egalitatea (7.4.8) ne spune că la echilibru tare în ipoteza (7.4.7) și ipotezele de elipticitate tare și de simetrie I și II, și amplitudinea termică a undei are aceleași proprietăți de simetrie ca și amplitudinea mecanică.

Din (7.2.23), (7.4.7) și (7.4.9) se vede că amplitudinea termică a undei ν^* se anulează dacă și numai dacă amplitudinea mecanică $\mathbf{a}^*$ este vector propriu pentru $\mathbf{Q}^*$.

Dacă $\nu_1^* = 0$ atunci $\mathbf{a}_1^*$ este vector propriu al lui $\mathbf{Q}^*$ cu valoarea proprie U_1^{*2}. Notînd valorile proprii ale lui $\mathbf{Q}^*$ cu $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$ urmează că $U_1^* = \lambda_1^*$. Relația (7.4.6) implică existența unei alte valori proprii, să zicem $Z_2^* > 0$. Există două cazuri: a) $Z_2^* = Z_1^* = \lambda_1^*$, adică $Z = \lambda_1^*$ este rădăcină dublă a ecuației (7.2.19) dar nu este valoare proprie a lui $\mathbf{Q}^*$ și b) $Z_2^* \neq \lambda_1^*$ sau $Z_2^* = \lambda_1^*$ dar λ_1^* este valoare proprie dublă a lui $\mathbf{Q}^*$.

În cazul b) se repetă raționamentul de mai sus și urmează că dacă $\nu_2^* = 0$ atunci $Z_2^* = \lambda_2^*$ (λ_2^* egal eventual cu λ_1^*) și din (7.4.6) găsim $Z_3^* > 0$. Din nou sînt posibile cele două cazuri a) și b). Presupunem că sîntem în cazul b), atunci urmează că $Z_3^* = \lambda_3^*$, deci $Z_4^* = (z^* + \rho_0 \theta^* \mathbf{P}^* \mathbf{P}^*)/v^*$. Atunci, ținînd seama de aceasta și de $Z_i^* = \lambda_i^*$, $i = 1, 2, 3$ în (7.2.19) ajungem la concluzia că $\mathbf{D}^{*2} + (\mathbf{Q}^* * \mathbf{P}^*)\,\mathbf{P}^* = 0$. Aceasta implică $\mathbf{D}^* = \mathbf{0}$ și $\mathbf{P}^* = \mathbf{0}$ ceea ce contrazice ipoteza (7.4.7).

În cazul a) scriind sistemul de ecuații (7.2.22)—(7.2.23) în baza de vectori proprii a lui $\mathbf{Q}^*$ (pentru ușurarea calculului) și ținînd seama că $Z = \lambda_1^*$ este rădăcină dublă a ecuației (7.2.19) ajungem la concluzia că pentru $U^2 = \lambda_1^*$, $P_1^* = 0$ (unde P_i^* sînt componentele lui $\mathbf{P}^*$ în baza de vectori proprii a lui $\mathbf{Q}^*$) și soluțiile acestui sistem de ecuații sînt de forma

$$\left(a_1^*,\ \frac{P_2^*}{\lambda_1^* - \lambda_2^*}\nu_1^*,\ \frac{P_3^*}{\lambda_1^* - \lambda_3^*}\nu_1^*,\ \nu_1^*\right). \tag{7.4.10}$$

Aceasta înseamnă că există soluții cu $\nu^* \neq 0$ și din (7.4.9) urmează că $\mathbf{D}^* = 0$. Dacă $U^2 = \lambda_1^*$ este soluție triplă a ecuației (7.2.19) dar pentru $\mathbf{Q}^*$ este numai valoare proprie dublă, atunci $P_1^* = P_2^* = 0$ și soluțiile sistemului (7.2.22) — (7.2.23) sînt de forma

$$\left(a_1^*, a_2^*, \frac{\nu^* P_3^*}{\lambda_1^* - \lambda_3^*}, \nu^*\right) \tag{7.4.11}$$

și urmează aceleași concluzii ca mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie dacă ipotezele (7.1.7), (7.4.7), ipotezele de simetrie I și II și condiția de elipticitate tare sînt satisfăcute, atunci pentru orice direcție de propagare $\mathbf{n}$ și pentru orice stare de echilibru tare ecuația (7.2.19) nu poate avea trei rădăcini care să fie în același timp valori proprii ale lui $\mathbf{Q}^*$ și

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}^* = \mathbf{0}. \tag{7.4.12}$$

Din (7.3.7), (7.3.9) și (7.4.12) urmează că ecuația (7.2.19) are toate rădăcinile reale și pozitive. Adică pentru orice direcție de propagare $\mathbf{n}$, în vecinătatea oricărei stări de echilibru tare există patru viteze de propagare reale $U_i^* > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ și corespunzător lor patru amplitudini ale undei (a_i^*, ν_i^*) $i = 1, 2, 3, 4$. Cel puțin două din cele patru unde cară și salturi ale derivatelor temperaturii.

Ținînd seama de (7.4.12) ecuația (7.2.19) se scrie la echilibru tare astfel

$$\begin{aligned} &v^*Z^4 - (v^*I_{\mathbf{Q}^*} + z^* + \rho_0\theta^*\mathbf{P}^*\mathbf{P}^*)Z^3 + [v^*II_{\mathbf{Q}^*} + z^*I_{\mathbf{Q}^*} + \\ &+ \rho_0\theta^*(I_{\mathbf{Q}^*}\mathbf{P}^*\mathbf{P}^* - (\mathbf{Q}^* * \mathbf{P}^*)\mathbf{P}^*)]Z^2 - [v^*III_{\mathbf{Q}^*} + z^*II_{\mathbf{Q}^*} + \\ &+ \rho_0\theta^*(II_{\mathbf{Q}^*}\mathbf{P}^*\mathbf{P}^* - I_{\mathbf{Q}^*}(\mathbf{Q}^* * \mathbf{P}^*)\mathbf{P}^* + (\mathbf{Q}^{*2} * \mathbf{P}^*)\mathbf{P}^*)]Z + \\ &+ z^*III_{\mathbf{Q}^*} = 0 \end{aligned} \tag{7.4.13}$$

§ 5. Fluxul de căldură în vecinătatea unei stări de echilibru tare

Principiul invarianței răspunsului materialului la schimbările de reper (vezi Coleman și Gurtin [1967] formula $(12.4)_4$, și de asemenea formula (5.3.9)), în ipoteza $(7.1.7)_1$, implică faptul că funcția de răspuns care dă pe $\mathbf{q}$ poate fi scrisă sub forma

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{F} * \tilde{\mathbf{q}}^+(\mathbf{C}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \tag{7.5.1}$$

unde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T * \mathbf{F}$. Din (7.1.4) conchidem că

$$\tilde{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = J\tilde{\mathbf{q}}^+(\mathbf{C}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \check{\mathbf{q}}(\mathbf{C}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \tag{7.5.2}$$

adică funcția de răspuns $\check{\mathbf{q}}$ depinde de gradientul deformației $\mathbf{F}$ numai prin intermediul tensorului deformației al lui Cauchy-Green la dreapta $\mathbf{C}$.

Vom arăta în continuare că la echilibru tare

$$\frac{\partial \hat{q}^*}{\partial F} = 0. \tag{7.5.3}$$

Într-adevăr, din $(7.2.13)_2$ și $(7.4.12)_2$ urmează că

$$\frac{\partial \hat{q}_k^*}{\partial F_{il}} + \frac{\partial \hat{q}_i^*}{\partial F_{ik}} = 0. \tag{7.5.4}$$

Din (7.5.2) obținem

$$\frac{\partial \hat{q}_k^*}{\partial F_{il}} = 2 \frac{\partial \check{q}_k^*}{\partial C_{jl}} F_{ij}^*. \tag{7.5.5}$$

Prin introducerea lui (7.5.5) în (7.5.4), rezultă

$$\frac{\partial \check{q}_k^*}{\partial C_{jl}} = \frac{\partial \check{q}_i^*}{\partial C_{jk}} = 0. \tag{7.5.6}$$

Deoarece $C_{ij} = C_{ji}$, (7.5.6) implică

$$\frac{\partial \check{q}_i^*}{\partial C_{jk}} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{7.5.7}$$

de unde (7.5.3) urmează imediat.

Egalitățile (7.3.5) și (7.5.3) conduc la concluzia

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}^*}{\partial F_{ij}\, \partial \alpha_r} A_{rk}^* = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{7.5.8}$$

Ținînd seama de $(7.1.8)_1$, $(7.3.10)_1$ și (7.5.3) putem scrie în vecinătatea unei stări de echilibru tare

$$\tilde{q}_i = \hat{q}_i(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \hat{q}_i^*}{\partial \alpha_k} (\alpha_k - \alpha_k^*) + 0_i^{(2)}(|\mathbf{F} - \mathbf{F}^*| + |\theta - \theta^*| + |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^*|). \tag{7.5.9}$$

Am obținut astfel următorul rezultat: în vecinătatea unei stări de echilibru tare fluxul de căldură poate fi aproximat, cu o eroare de ordinul $\mathbf{0}^2(|\mathbf{F} - \mathbf{F}^*| + |\theta - \theta^*| + |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^*|)$, cu o funcție ce depinde numai de variabilele interne de stare.

Scanned with OKEN Scanner

Ca o aplicație a celor prezentate în paragrafele anterioare vom discuta aici implicațiile făcute acolo, asupra teoriei liniare. Presupunem că starea ($\mathbf{F} = \mathbf{I}$, $\theta = \theta_0$, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^0$) este o stare de echilibru tare și că

$$\hat{\psi}^* = 0, \quad \hat{\eta}^* = 0, \quad \hat{\mathbf{S}}^* = \mathbf{0}. \tag{7.6.1}$$

În plus, presupunem că materialul este izotrop.

La o transformare ortogonală $\mathbf{H}$ din grupul de izotropie, $\tilde{\mathbf{q}}$ definit în (7.1.4) trece în $\mathbf{H}^T * \tilde{\mathbf{q}}$. În scop ilustrativ, vom presupune că primele trei componente ale vectorului $\boldsymbol{\alpha}$ al variabilelor interne de stare se comportă la transformările $\mathbf{H}$ la fel ca și $\tilde{\mathbf{q}}$, iar celelalte rămîn neschimbate, adică vom descompune $\boldsymbol{\alpha}$ astfel

$$\boldsymbol{\alpha} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_N) = (\boldsymbol{\beta}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) \tag{7.6.2}$$

unde

$$\boldsymbol{\beta} \to \mathbf{H}^T * \boldsymbol{\beta}, \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}} \to \bar{\boldsymbol{\alpha}} \tag{7.6.3}$$

Introducem tensorul simetric al deformațiilor $\boldsymbol{\varepsilon}$ definit astfel

$$2\varepsilon_{ij} = F_{ij} + F_{ji} - 2\delta_{ij}. \tag{7.6.4}$$

În ipoteza (7.6.3), ținînd seama de izotropia materialului și indiferența răspunsului materialului la schimbările de reper, energia liberă devine o funcție izotropă de tensorul $\mathbf{B} = \mathbf{F} * \mathbf{F}^T$ și de vectorul $\boldsymbol{\beta}$ (vezi de exemplu Truesdell și Noll [1965], sect. 11). În plus, dacă

$$(\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij})^{1/2} \ll 1, \quad |\theta - \theta_0|/\theta_0 \ll 1, \quad |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0| \ll 1$$

atunci energia liberă $\hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \tilde{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\alpha})$ poate fi scrisă în vecinătatea stării de echilibru tare astfel

$$\begin{aligned}\rho_0\tilde{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\Big\{&\lambda\varepsilon_{rr}^2 + 2\mu\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij} - \frac{2\varkappa}{\theta_0}(\theta-\theta_0)\,\varepsilon_{rr} - \\ &- \frac{v}{\theta_0}(\theta-\theta_0)^2 - \frac{2}{\theta_0}(\theta-\theta_0)\,\Delta_k(\alpha_k - \alpha_k^0) + \\ &+ 2\varepsilon_{rr}\,\Gamma_k(\alpha_k - \alpha_k^0) + \Lambda_{kl}(\alpha_k - \alpha_k^0)(\alpha_l - \alpha_l^0)\Big\}\end{aligned} \tag{7.6.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde λ și μ sînt constantele lui Lammé, $\varkappa/\theta_0$ este modulul tensiune-temperatură, v/θ_0 este capacitatea calorică, Γ_k, Δ_k și Λ_{kl} sînt definite astfel

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}^*}{\partial F_{ij}\, \partial \alpha_k} = \delta_{ij}\, \Gamma_k \tag{7.6.6}$$

$$\rho_0 \theta_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}^*}{\partial \theta \partial \alpha_k} = -\, \Delta_k \tag{7.6.7}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \hat{\psi}^*}{\partial \alpha_k\, \partial \alpha_l} = \Lambda_{kl}. \tag{7.6.8}$$

Toate constantele din (7.6.5)—(7.6.8) sînt calculate la starea de echilibru tare ($\mathbf{F} = \mathbf{I}$, $\theta = \theta_0$, $\mathbf{g}_0 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0$). Din $(7.3.10)_2$ și (7.5.8) urmează respectiv

$$\Gamma_k\, A^*_{ki} = 0, \quad \Delta_k\, A^*_{ki} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7.6.9}$$

Odată ce energia liberă ψ este dată ca funcție de $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$, θ și $\boldsymbol{\alpha}$, (5.1.21) vor determina funcțiile $\tilde{\mathbf{S}}$ și $\tilde{\eta}$ astfel

$$\tilde{S}_{ij} = \lambda \varepsilon_{rr}\, \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \frac{\varkappa}{\theta_0} (\theta - \theta_0)\, \delta_{ij} + \\ + \Gamma_k (\alpha_k - \alpha_k^0)\, \delta_{ij} \tag{7.6.10}$$

$$\rho_0 \theta_0 \tilde{\eta} = \varkappa \varepsilon_{rr} + v(\theta - \theta_0) + \Delta_k (\alpha_k - \alpha_k^0). \tag{7.6.11}$$

Energia internă se exprimă astfel

$$\rho_0 e = \rho_0 \tilde{\psi} + \rho_0 \theta \tilde{\eta} = \varkappa \varepsilon_{rr} + v(\theta - \theta_0) + \Delta_k (\alpha_k - \alpha_k^0) + \\ + \frac{1}{2} \Big\{ \lambda \varepsilon_{rr}^2 + 2\mu \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij} + \frac{v}{\theta_0} (\theta - \theta_0)^2 + 2\varepsilon_{rr}\, \Gamma_k (\alpha_k - \alpha_k^0) + \\ + \Lambda_{kl} (\alpha_k - \alpha_k^0)\, (\alpha_l - \alpha_l^0) \Big\}. \tag{7.6.12}$$

Cum s-a văzut în paragraful precedent fluxul de căldură în vecinătatea unei stări de echilibru tare, poate fi aproximat cu o funcție liniară de variabilele interne de stare (vezi formula (7.5.9))

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \tilde{q}_i^*}{\partial \alpha_k} (\alpha_k - \alpha_k^0). \tag{7.6.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de (7.6.3) și (7.6.13) funcția $\tilde{\mathbf{q}}$ este o funcție vectorială izotropă de un singur vector și astfel trebuie să avem

$$\tilde{\mathbf{q}} = -\gamma(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0), \qquad \frac{\partial \tilde{q}_i^*}{\partial \alpha_k} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 4, \ldots, N \tag{7.6.14}$$

unde γ este o constantă.

Utilizînd descompunerea (7.6.2) — (7.6.3) și ipoteza $(7.1.7)_2$, ecuația de evoluție (5.1.7) se poate descompune astfel

$$\dot{\beta}_i = A_{ik} g_{0k} + b_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{7.6.15}$$

$$\dot{\bar{\alpha}}_j = A_{jk} g_{0k} + b_j, \quad j = 4, \ldots, N. \tag{7.6.16}$$

Funcțiile $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ și $\mathbf{A}\mathbf{g}_0 = (A_{1k}g_{0k}, A_{2k}g_{0k}, A_{3k}g_{0k})$ cu valori vectoriale sînt funcții izotrope de un tensor simetric și de un vector (vezi Truesdell și Noll [1965], sect. 13). Din linearizarea în vecinătatea stării de echilibru tare și din izotropie, ecuația (7.6.15) ia forma

$$\dot{\beta}_i = A g_{0i} + \delta(\beta_i - \beta_i^0) \tag{7.6.17}$$

unde A și δ sînt constante. Deoarece $\bar{\alpha}_j$, $j = 4, \ldots, N$, sînt presupuși scalari, din aceleași motive ca mai sus urmează că

$$A_{ik}^* = A\delta_{ik}, \quad \bar{A}_{jk}^* = 0, \quad i, k = 1, 2, 3; \; j = 4, \ldots, N \tag{7.6.18}$$

iar $\bar{b}_j$, $j = 4, \ldots, N$ nu depind de $\beta - \beta^0$ și sînt funcții liniare de primul invariant ε_{kk} al lui ε, de $\theta - \theta_0$ și de $\bar{\alpha}_k - \alpha_k^0$, $k = 4, \ldots, N$.

Cu ajutorul lui $(7.6.14)_1$ ecuațiile de evoluție (7.6.17) se scriu

$$-\frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = A\mathbf{g}_0 + \frac{\delta}{\gamma}\tilde{\mathbf{q}}. \tag{7.6.19}$$

Ecuația (7.6.19) nu este altceva decît ecuația hiperbolică de conducție a căldurii a lui Cattaneo [1948]. Astfel s-a ajuns la concluzia că în teoria liniară fluxul de căldură este o variabilă internă de stare iar ecuația lui Cattaneo reprezintă o ecuație de evoluție pentru fluxul de căldură. Concluzii simi-

Scanned with OKEN Scanner

lare au fost trase de Suliciu [1975 b] pentru cazul unidimensional, unde în locul ipotezei existenței unei stări de echilibru tare a fost folosită o altă ipoteză. Evident că pentru procese lente ecuația (7.6.19) poate fi aproximată cu ecuația constitutivă a lui Fourier.

Din (7.6.18) și (7.6.9) se obține că

$$\Gamma_k = 0, \quad \Delta_k = 0, \quad k = 1, 2, 3 \tag{7.6.20}$$

iar din $(7.2.14)_1$, (7.6.14) și (7.6.18) avem

$$z^* = \gamma A. \tag{7.6.21}$$

În continuare vrem să scriem în acest caz ecuația (7.4.13) pentru vitezele de propagare. Din (7.6.2), $(7.2.11)_1$ și (7.2.12) obținem

$$\rho_0 Q_{ij} = (\lambda + \mu)\, n_i n_j + \mu \delta_{ij}, \quad P_i^* = -\frac{\varkappa}{\rho_0 \theta_0} n_i. \tag{7.6.22}$$

Prin utilizarea lui (7.6.22), (7.4.13) devine

$$(Z - a_t^2)^2 \{Z^2 - (a_l^2 + a_c^2 + a_d^2) Z + a_c^2 a_l^2\} = 0 \tag{7.6.23}$$

unde a_l și a_t sînt respectiv vitezele longitudinale și transversale de propagare a undelor mecanice de accelerație, a_c va fi numită viteza lui Cattaneo de propagare a undelor termice de accelerație (pentru legătura dintre teoria materialelor cu variabile interne de stare și ecuația hiperbolică a conducției căldurii a lui Cattaneo, vezi Suliciu [1975 b]) și a_d este un coeficient de cuplare termomecanică. Aceste cantități sînt definite astfel

$$a_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}, \quad a_t^2 = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad a_c^2 = \frac{z^*}{v^*}, \quad a_d^2 = \frac{\varkappa^2}{\rho_0 \theta_0 v^*}. \tag{7.6.24}$$

Pentru $Z = a_t^2$, notînd cu $\mathbf{a}_t$ vectorul propriu al lui $\mathbf{Q}^*$ corespunzător valorii proprii a_t^2, atunci $\mathbf{a}_t \mathbf{n} = 0$ iar din (7.4.12) și $(7.6.22)_2$ urmează că $(\mathbf{a}_t, \nu = 0)$ este soluție a sistemului (7.2.22)—(7.2.23). Astfel, în teoria liniară și izotropă, pentru orice direcție de propagare $\mathbf{n}$ pot există două unde de accelerație transversale pentru care numai amplitudinea mecanică a undei este nenulă, la fel ca și în cazul mecanic pur.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $Z \neq a_t^2$ ecuațiile (7.2.22)—(7.2.23) pentru amplitudinea undei $(\mathbf{a}, \nu)$, dacă ținem seama de (7.4.12) și de (7.6.22) se scriu

$$(Z - a_c^2)\,\nu = -\frac{\varkappa}{v^*} Z(\mathbf{a}\,\mathbf{n}),$$

$$Za_i - \left\{\frac{\lambda+\mu}{\rho_0}(\mathbf{a}\,\mathbf{n})\,n_i + \frac{\mu}{\rho_0} a_i\right\} = -\frac{\varkappa}{\rho_0\theta_0}\nu n_i.$$

De aici

$$(Z^2 - (a_l^2 + a_c^2 + a_d^2)\,Z + a_c^2 a_l^2)\,(\mathbf{a}\,\mathbf{n}) = (Z - a_l^2)\,a_\perp^2 \qquad (7.6.25)$$

unde $a_\perp$ este componenta lui $\mathbf{a}$ perpendiculară pe $\mathbf{n}$. Astfel, dacă $Z = Z_1^* \neq a_l^2$ este o rădăcină a ecuației (7.6.23) atunci $a_\perp = 0$, adică amplitudinea mecanică a undei este longitudinală.

Prin urmare pentru orice direcție dată $\mathbf{n}$ pot exista totdeauna două unde transversale care se propagă cu viteza

$$U^2 = \frac{\mu}{\rho_0} \qquad (7.6.26)$$

independentă de direcția de propagare și la traversarea acestora amplitudinea termică $\nu = 0$.

Dacă

$$(\lambda+\mu)\,z^* \neq \mu\left[(\lambda+\mu)\,v^* + \frac{\varkappa}{\theta_0}\right] \qquad (7.6.27)$$

adică dacă $U^2 = \mu/\rho_0$ nu este rădăcină triplă pentru (7.6.23) atunci pentru orice direcție $\mathbf{n}$ pot exista întotdeauna două unde longitudinale ce se propagă cu vitezele obținute ca rădăcini ale ecuației

$$U^4 - (a_l^2 + a_c^2 + a_d^2)\,U^2 + a_c^2 a_l^2 = 0. \qquad (7.6.28)$$

Dacă $a_d \neq 0$, sau echivalent, dacă condiția (7.4.7) este satisfăcută, atunci undele longitudinale de accelerație sînt cuplate, adică la traversarea lor amplitudinea mecanică $\mathbf{a}$ și amplitudinea termică ν sînt diferite de zero în același timp.

Dacă condiția (7.6.27) nu este satisfăcută adică dacă $U^2 = \mu/\rho_0$ este rădăcină a ecuației (7.6.28) atunci, cum se vede din (7.6.25) și (7.4.11), unda nu este în general nici transversală nici longitudinală.

Scanned with OKEN Scanner

Cum s-a văzut în § 3 inegalitatea (7.3.8) implică $z^* > 0$. Dacă se presupune că membrul stîng al lui (7.3.8) este nul pentru orice vector $\mathbf{c} \in R^3$ atunci urmează că $z^* = 0$ pentru orice $\mathbf{n} \in R^3$ și invers. $z^* = 0$ implică $a_c = 0$ și ecuația (7.6.28) are o rădăcină $U^{*2} = 0$ iar cealaltă rădăcină este dată de

$$U_a^{*2} = a_i^2 + a_d^2. \tag{7.6.29}$$

U_a^* se numește uneori viteza adiabatică de propagare a sunetului. Condiția $z^* = 0$ impune restricții asupra dependenței lui $\tilde{\mathbf{q}}$ și $\tilde{\psi}$ de $\boldsymbol{\alpha}$ dar nu rezultă că $\frac{\partial \tilde{q}_i^*}{\partial \alpha_k} = 0$ și $\Lambda_{kl} = 0$.

Chiar în cazul neliniar, la echilibru tare, pentru $z^* = 0$, se obține din (7.2.22) și (7.2.23) că

$$U\mathbf{a} = \mathbf{Q}^* * \mathbf{a} + \frac{\rho_0 \theta^*}{v^*} (\mathbf{P}^* \mathbf{a}) \mathbf{P}^*. \tag{7.6.30}$$

Tensorul

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \frac{\rho_0 \theta}{v} \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \tag{7.6.31}$$

se numește tensorul acustic adiabatic. La concluzii similare se ajunge în teoria propagării undelor în materiale cu memorie atenuată (vezi Coleman și Gurtin [1965]) dacă se presupune că materialul este neconductor de căldură (adică $\tilde{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{0}$); același rezultat are loc și pentru materiale cu variabile interne de stare în ipoteza $\tilde{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{0}$ (vezi Bowen și Chen [1972]).

§ 7. Unde de șoc

7.a. O suprafață netedă Σ de ecuație $\varphi(\mathbf{X}, t) = 0$, $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ (unde $\mathcal{R}$ este configurația de referință a corpului $\mathcal{B}$) se numește undă de șoc dacă mișcarea $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ este continuă în $(\mathbf{X}, t)$ peste tot dar derivatele sale $\mathbf{F} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}}$, $\mathbf{v} = \frac{\partial \chi}{\partial t}$ și temperatura θ suferă discontinuități de salt la traversarea lui Σ fiind continue în afara suprafeței Σ.

Dacă într-un punct $(\mathbf{X}, t)$ suprafața Σ este regulată, adică dacă $\mathrm{Grad}_{\mathbf{X}} \varphi \neq \mathbf{0}$, atunci la traversarea suprafeței de

Scanned with OKEN Scanner

discontinuitate în acel punct, sînt satisfăcute următoarele condiții cinematice și dinamice de compatibilitate (vezi de exemplu Truesdell și Toupin [1960] formulele (189.1), (205.3), (241.5), (258.4) scrise în raport cu configurația inițială de referință utilizînd tensorul tensiune al lui Piola-Kirchhoff, vezi Anexa 3)

$$[F_{ij}] = a_i n_j, \quad [v_i] = -Sa_i \tag{7.7.1}$$

$$\rho_0 [v_i] S + [\tilde{S}_{ij}] n_j = 0 \tag{7.7.2}$$

$$\rho_0 \left[e + \frac{v^2}{2} \right] S + [v_i \tilde{S}_{ij} - \tilde{q}_j] n_j = 0 \tag{7.7.3}$$

$$\rho_0 S[\eta] \geqslant -\left[\frac{\tilde{q}_i}{\theta} \right] n_i \tag{7.7.4}$$

unde $S = -(\partial\varphi/\partial t) \,/\, |\mathrm{Grad}_{\mathbf{X}} \varphi|$ se numește viteza de propagare a undei de șoc, $\mathbf{n}$ $(n_i = (\partial\varphi / \partial X_i) \,/\, |\mathrm{Grad}_{\mathbf{X}} \varphi|)$ este normala în $\mathcal{R}$ la Σ, pentru un t fixat, iar $\mathbf{a}$ este amplitudinea mecanică a undei de șoc.

Ecuația de evoluție (5.1.7) pentru o condiție inițială fixată și un $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ fixat determină pe $\boldsymbol{\alpha}(t)$ ca funcție continuă de t pentru orice $\mathbf{F}(t)$, $\theta(t)$, $\mathbf{g}(t)$, $t \geqslant t_0$, funcții riglate de t (adică funcții care au în orice t limite la dreapta și la stînga). Aplicînd un rezultat similar propoziției (2.5) a lui Suliciu [1974] urmează că $[\boldsymbol{\alpha}] = \mathbf{0}$ la traversarea suprafeței Σ, dacă $S \neq 0$. Prin urmare salturile cantităților $\tilde{\mathbf{S}}$, e, η și $\tilde{\mathbf{q}}$ sînt determinate numai de salturile lui $\mathbf{F}$, θ și $\mathbf{g}$ dacă $S \neq 0$. În definiția undei de accelerație de la începutul paragrafului 2 s-a presupus că $\boldsymbol{\alpha}$ este continuu. Din același motiv ca mai sus urmează că $\boldsymbol{\alpha}$ este continuu la traversarea oricărei suprafețe de discontinuitate pentru care $U \neq 0$. Deci, în definiția undei de accelerație este necesar să se presupună numai că $\boldsymbol{\alpha}$ este continuu la traversarea undelor staționare, adică a suprafețelor de discntinuitate pentru care $U = 0$.

Din (7.7.1)—(7.7.3) prin eliminarea lui $[\mathbf{v}]$ și $\mathbf{a}$ se deduce

$$S\left\{ \rho_0 [e] - \frac{1}{2} (\tilde{S}^+_{ij} + \tilde{S}^-_{ij}) [F_{ik}] n_j n_k \right\} - [\tilde{q}_j] n_j = 0 \tag{7.7.5}$$

și

$$\rho_0^2 S^4 = \frac{[\tilde{S}_{ij}] [\tilde{S}_{ik}] n_j n_k}{[F_{ij}] [F_{ik}] n_j n_k}. \tag{7.7.6.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acum, dacă ipoteza (7.1.7) este îndeplinită, normala $\mathbf{n}$ și starea din fața undei, $\mathbf{F}^+$, θ^+ și $\boldsymbol{\alpha}$, sînt fixate, atunci între valorile $\mathbf{F}^-$, θ^- din spatele undei există o relație determinată de (7.7.5), (7.7.6) și ecuațiile constitutive (5.1.20), (5.1.21), $(7.1.8)_1$ $(7.1.7)_2$ și (5.1.7). În cazul unidimensional o relație de acest tip este numită relația lui Hugoniot.

7.b. În cazul liniar, ținînd seama că variabilele interne de stare nu au salt la traversarea suprafețelor de discontinuitate pentru care $S \neq 0$, urmează din (7.6.13) că

$$[\tilde{q}_i] = 0. \tag{7.7.7}$$

Prin utilizarea expresiilor (7.6.10)—(7.6.12) pentru $\tilde{S}_{ij}$, $\tilde{\eta}$ și $\tilde{e}$, a condițiilor de salt $(7.7.1)_1$ și (7.7.7) în (7.7.5) se obține legătura dintre amplitudinea mecanică și termică astfel

$$v[\theta] + \varkappa \mathbf{a}\,\mathbf{n} = 0. \tag{7.7.8}$$

Această relație împreună cu (7.6.11) implică

$$[\eta] = 0 \tag{7.7.9}$$

ceea ce înseamnă că în cazul teoriei liniare cu variabile interne de stare, la fel ca și în termoelasticitatea liniară uzuală, în ipoteza că materialul nu este conducător de căldură, șocurile sînt în același timp adiabatice și izotermice.

Din (7.7.1), (7.7.2), (7.6.10) și (7.7.8) obținem

$$\left\{\left(\lambda + \mu + \frac{\varkappa^2}{\theta_0 v}\right) n_i n_j + (\mu - \rho_0 S^2)\,\delta_{ij}\right\} a_j = 0. \tag{7.7.10}$$

Ecuația (7.7.10) pentru amplitudinea mecanică a undei de șoc în direcția de propagare $\mathbf{n}$ fixată are soluții nebanale numai pentru acei S^2 care sînt rădăcini ale ecuației

$$(S^2 - a_t^2)^2\,(S^2 - a_l^2 - a_d^2) = 0. \tag{7.7.11}$$

Prin urmare am ajuns la următoarele concluzii: pot exista două tipuri de unde de șoc, la fel ca în cazul materialului neconductor, o undă transversală dublă la traversarea căreia saltul temperaturii este zero și o undă longitudinală de șoc care se propagă cu viteza adiabatică a sunetului (7.6.29) și la traversarea căreia sînt diferite de zero atît amplitudinea mecanică și cît cea termică.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă prin U_l^{*2} și U_h^{*2}, $U_l^{*2} < U_h^{*2}$ se notează cele două rădăcini ale ecuației (7.6.28) atunci are loc următoarea inegalitate

$$U_l^{*2} < a_l^2 < U_a^{*2} < U_h^{*2}. \tag{7.7.12}$$

Această inegalitate pentru vitezele de propagare ale undelor longitudinale de șoc și de accelerație are aceeași formă cu inegalitatea obținută pentru cazul unidimensional de Suliciu [1975 b]. El a arătat că în cazul ciocnirii unei bare elastice în repaus, la temperatura ambiantă θ_0 și deformație nulă, cu o bară ce se mișcă cu viteza V_0 și are deformația uniformă $\varepsilon_0 \neq 0$ și temperatura uniformă $\widetilde{\theta}_0 \neq \theta_0$, în cele două bare se vor propaga unde de șoc și de accelerație. Prima se va propaga o undă de accelerație cu viteza U_h^* apoi o undă de șoc cu viteza U_a^* urmată de o undă de accelerație ce se propagă cu viteza U_l^*.

Tabloul de mai sus de variație în timp și spațiu al cantităților termomecanice este similar cu tabloul de variație furnizat de termoelasticitatea liniară uzuală cînd pentru fluxul de căldură este adoptată o lege de tip Fourier (vezi Danilovskaia [1950] și de asemeni Boley și Weiner [1960], cap. 1). Diferența principială constă în faptul că aici perturbația din fața undei de șoc se propagă cu viteză finită.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VIII

Unele ecuații constitutive folosite în viscoplasticitatea clasică

Datorită diversității proprietăților materialelor și a varietății condițiilor experimentale, au fost propuse în cursul anilor o serie de ecuații constitutive. Ecuațiile constitutive simplificate propuse urmăreau să descrie comportările observate experimental. Marea lor majoritate însă descriu relativ corect numai o gamă foarte îngustă de fenomene observate experimental. Prin descrierea corectă înțelegem aici atît descrierea calitativă cît și cantitativă. Pentru acele fenomene care pot fi descrise calitativ cu ecuația constitutivă considerată, descrierea cantitativă se face prin determinarea din datele experimentale a unui număr de constante sau funcții de material.

§ 1. Modelul rigid-vîscoplastic al lui Bingham

Modelul lui Bingham [1922] se caracterizează prin aceea că materialul începe să curgă numai după ce forțele aplicate au depășit o anumită limită numită limită de curgere.

În continuare vom descrie acest model. Vom presupune că deformațiile sînt mici și anume dacă $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ este mișcarea corpului atunci tensorul care caracterizează micile deformații ale corpului este [1]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \chi_j}{\partial X_i}\right) - \delta_{ij}. \tag{8.1.1}$$

[1]) În cazul deformațiilor mari în locul lui (8.1.1) se poate folosi tensorul lui Cauchy-Green $\mathbf{F} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$ (vezi Cap. V § 3)

Se introduc tensorii deviatori ai deformației și tensiunii

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{8.1.2}$$

unde $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3\varepsilon$, $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma$ iar σ_{ij} fiind tensorul tensiune.

În afară de deviatorii e_{ij} și s_{ij} se mai introduce un tensor deviator k_{ij} descris ca fiind deviatorul tensiunii corespunzător proprietăților plastice.

Se va numi proces, orice funcții netede $e_{ij}(t)$, $s_{ij}(t)$, $k_{ij}(t)$ pentru $t \in [0, T]$ unde $T > 0$ este durata procesului. Modelul Bingham al corpului rigid-vîscoplastic presupune că în orice proces trebuie să avem

$$s_{ij}(t) = k_{ij}(t) + 2\eta\dot{e}_{ij}(t) \tag{8.1.3}$$

$$f(k_{ij}(t)) = k_{ij}(t)\,k_{ij}(t) - 2k^2 \leqslant 0 \tag{8.1.4}$$

și

$$\dot{e}_{ij}(t) = 2\lambda(t)\,k_{ij}(t) \tag{8.1.5}$$

unde $\dot{e}_{ij}(t)$ este deviatorul vitezei de deformare și este derivata în raport cu timpul a lui $e_{ij}(t)$[1]), $\eta > 0$ este un coeficient de vîscozitate, k este limita de curgere la forfecare pură (considerată constantă pentru acest model) iar $\lambda(t)$ ca funcție de t este definită astfel:

$$\lambda(t) = \Lambda(k_{ij}(t), k_{ij}(t)) = \begin{cases} > 0 \text{ dacă } f(k_{ij}(t)) = 0,\ \mathrm{d}f(k_{ij}(t)) = 0 \\ = 0 \text{ dacă } \begin{cases} f(k_{ij}(t)) < 0 \\ f(k_{ij}(t)) = 0 \text{ și } \mathrm{d}f(k(t)) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

iar (8.1.6)

$$\mathrm{d}f(k_{ij}(t)) = \frac{\partial f(k_{ij}(t))}{\partial k_{lm}} \frac{\mathrm{d}k_{lm}(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t.$$

O condiție de curgere de tipul (8.1.4) se numește condiția lui Mises. Ea exprimă faptul că intensitatea deviatorului k_{ij}, adică $II_k = \frac{1}{2}k_{ij}k_{ij}$, nu poate depăși limita de curgere

[1]) În cazul deformațiilor mari se folosește tensorul vitezelor de deformare $D_{ij} = (1/2)(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$ și tensorul spin $W_{ij} = (1/2)(\partial v_i/\partial x_i - \partial v_i/\partial x_j)$, unde $x_i = \chi_i(\mathbf{X}, t)$ iar $v_i = \partial\chi_i/\partial t$.

la forfecare pură. Din (8.1.5) și (8.1.6) se vede că deviatorul deformației poate varia numai cînd k_{ij} este pe suprafața $f(k_{ij}) = 2k^2$ și se mișcă pe ea. e_{ij} rămîne constant pentru toate celelalte procese. Aceasta justifică denumirea de condiție de curgere pentru egalitatea (8.1.4).

Pînă acum nu s-a specificat nici o ecuație constitutivă pentru tensiunea medie σ și deformația medie ε. De obicei pentru modelul Bingham se adaugă ipoteza incompresibilității volumului, adică

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}(t) = 0 \tag{8.1.7}$$

pentru orice proces de orice durată $T \geqslant 0$.

În continuare să prezentăm modelul lui Bingham numai în termenii deviatorilor s_{ij} și $\dot{e}_{ij}$. Din (8.1.3) și (8.1.5) se obține

$$\begin{aligned} s_{ij} &= (1 + 4\eta\lambda)\, k_{ij} \\ II_s &= (1 + 4\eta\lambda)^2\, II_k. \end{aligned} \tag{8.1.8}$$

Se vede din (8.1.6) și (8.1.8) că pentru $\lambda = 0$, $II_s = II_k \leqslant k^2$ și că pentru $\lambda > 0$, $II_s > k^2$ și reciproc dacă $II_s = II_k \leqslant k^2$ atunci $\lambda = 0$ și dacă $II_s > k^2$ atunci $\lambda > 0$. Deci funcția $\lambda(t)$ este o funcție ce depinde de t prin intermediul lui II_s, de unde (8.1.6) poate fi scris și sub forma

$$\lambda(t) = \tilde{\Lambda}(II_s(t)) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } II_s \leqslant k^2 \\ \dfrac{1}{4\eta}\left(\dfrac{\sqrt{II_s(t)}}{k} - 1\right) & \text{pentru } II_s > k^2. \end{cases} \tag{8.1.9}$$

Din (8.1.5), (8.1.8) și (8.1.9) putem scrie

$$\dot{e}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } II_s \leqslant k^2 \\ \dfrac{1}{2\eta}\left(1 - \dfrac{k}{\sqrt{II_s}}\right) s_{ij} & \text{pentru } II_s > k^2. \end{cases} \tag{8.1.10}$$ [1)]

Se vede direct că puterea mecanică

$$s_{ij}\dot{e}_{ij} = 2k\sqrt{II_{\dot{e}}} + 4\eta II_{\dot{e}} \geqslant 0 \tag{8.1.11}$$

pentru orice proces într-un corp de tip Bingham.

[1)] În cazul deformațiilor mari (8.1.10) se scrie: $D_{ij} = 0$ pentru $II_s < k^2$ și $D_{ij} = (1/2\eta)(1 - k/\sqrt{II_s})s_{ij}$ pentru $II_s > k^2$ (8.1.10*) unde s_{ij} este deviatorul tensorului simetric al tensiunii lui Cauchy.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile constitutive (8.1.10) și (8.1.7) trebuie adăugate ecuațiilor de mișcare sau de echilibru și apoi formulate probleme inițiale și la limită. Pentru orice proces care pornește de la o stare naturală de echilibru ($\varepsilon_{ij} = 0$, $\sigma_{ij} = 0$ pentru $t = 0$) o problemă inițială și la limită nu poate fi în general rezolvată pentru un corp de tip Bingham. Aceasta deoarece pentru determinarea deplasărilor și tensiunilor avem numai cele trei ecuații de mișcare pentru $II_s \leqslant k^2$ iar funcțiile necunoscute sînt tensiunile s_{ij} și $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ij}$. Dacă numărul tensiunilor necunoscute într-o problemă concretă nu depășește trei, atunci se poate determina în general, din condițiile inițiale și la limită, un proces care începe dintr-o stare naturală de echilibru. Astfel pentru un model Bingham se pot formula, în general, probleme determinate (numărul funcțiilor este egal cu numărul ecuațiilor) numai în cazul în care $II_s > k^2$.

Cititorul interesat în descrierea altor aspecte ale modelului Bingham poate consulta de exemplu Reiner [1960], Cap. VIII, Eirich [1956], Oghibalov și Mirzadjanzade [1970].

§2. Modelul elasto-vîscoplastic

Acest model este în esență o înbunătățire a modelului Bingham (vezi Hohenemser și Prager [1932], Freudenthal [1958]).

În modelul Bingham pentru un proces care începe într-o stare naturală de echilibru, deformația rămîne nulă pînă cînd tensiunile depășesc limita de curgere. În modelul lui Hohenemser și Prager se presupune că odată cu creșterea tensiunilor cresc și deformațiile, iar între ele există o legătură dată de legea lui Hooke. După ce tensiunea a atins suprafața de curgere, legea constitutivă este schimbată cu o relație de tip rate.

În continuare prezentăm din punct de vedere matematic acest model. Ca și pentru modelul lui Bingham se presupune că starea corpului este descrisă de deviatorii e_{ij}, s_{ij}, k_{ij} și de deformația și tensiunea medie ε și σ. Noțiunea de proces rămîne aceeași. Ipotezele constitutive care se fac sînt ur-

Scanned with OKEN Scanner

mătoarele. Deviatorul vitezei de deformare se poate descompune în două componente

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^{E} + \dot{e}_{ij}^{VP} \tag{8.2.1}$$

unde $\dot{e}_{ij}^{E}$ este numit deviatorul vitezei de deformare elastică iar $\dot{e}_{ij}^{VP}$ este numit deviatorul vitezei de deformare vîscoplastică. Apoi se presupune că viteza deviatorului tensiunii și componenta elastică a deviatorului vitezei de deformare sînt legate printr-o relație de tip Hooke

$$\dot{s}_{ij} = 2G\dot{e}_{ij}^{E} \tag{8.2.2}$$

unde G este modulul de forfecare și se presupune că este constant. Deviatorul vitezei de deformare vîscoplastică $\dot{e}_{ij}^{VP}$ se presupune că este determinat de o ecuație de tip Bingham (8.1.10) adică

$$\dot{e}_{ij}^{VP} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } II_s \leqslant k^2 \\ \dfrac{1}{2\eta}\left(1 - \dfrac{k}{\sqrt{II_s}}\right) s_{ij} & \text{pentru } II_s > k^2 \end{cases} \tag{8.2.3}$$

și deci se presupune că deformația vîscoplastică apare numai după ce tensiunile au depășit o anumită limită de curgere ($II_s > k^2$).

În aceea ce privește deformația medie și tensiunea medie, uneori se presupune că volumul se deformează numai elastic, adică

$$\sigma = 3K\varepsilon \tag{8.2.4}$$

unde K este o constantă numită modulul de compresibilitate volumică, deși alteori din motive de simplicitate este admisă ipoteza de incompresibilitate $\varepsilon = 0$. Cu aceasta modelul este complet descris.

De multe ori se preferă ca ecuația constitutivă să fie prezentată ca o relație între deformația totală și tensiunea totală. Adunînd (8.2.2) cu (8.2.3) și ținînd seama de (8.2.1) putem scrie

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G}\dot{s}_{ij} + \frac{H(II_s - k^2)}{2\eta}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{II_s}}\right) s_{ij} \tag{8.2.5}$$ [1])

unde $H(II_s - k^2)$ este funcția lui Heaviside

$$H(II_s - k^2) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } II_s \leqslant k^2 \\ 1 & \text{dacă } II_s > k^2 \end{cases} \tag{8.2.6}$$

[1]) În cazul deformațiilor mari în formula (8.2.5) $\dot{s}_{ij}$ se înlocuiește cu o derivată obiectivă, de exemplu $\mathring{s}_{ij} = \dot{s}_{ij} - W_{ik}s_{kj} - s_{ik}W_{kj}$, unde s_{ij} este deviatorul tensorului tensiunii al lui Cauchy (vezi notele de la paginile precedente), iar $\dot{e}_{ij}$ se înlocuiește cu D_{ij} care este obiectiv.

Scanned with OKEN Scanner

Acest model este unul din cele mai simple modele de tip rate cu răspuns instantaneu (vezi Cap. VII, §2). Deși este mai complicat decît modelul lui Bingham, el rămîne totuși un model mult prea limitat pentru a putea descrie ecruisarea materialului, efectul lui Bauschinger, existența unei frontiere dinamice de relaxare diferită de cea cvasistatică (vezi Cap. II) etc.

Unul din inconvenientele principale ale acestui model este faptul că pentru orice stare de tensiune ținută constantă la o valoare s_{ij}^0 pentru care $II_s^0 > k^2$ deformația crește liniar în timp

$$e_{ij}(t) = e_{ij}^0 + \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{II_s^0}}\right)(t - t_0)\, s_{ij}^0 \qquad (8.2.7)$$

ceea ce este echivalent cu a spune că acest model are totdeauna un fluaj liniar, indiferent de starea de tensiune constantă aplicată.

Totuși ecuația constitutivă (8.2.5) poate descrie relativ bine procesul de relaxare a tensiunii la deformație constantă. Fie e_{ij}^0 ținută constantă pentru $t \geqslant t_0 > 0$ și fie $s_{ij}^0 = s_{ij}(t_0)$ starea de tensiune la momentul t_0 astfel încît $II_s^0 > k^2$. Din ecuația (8.2.5) obținem

$$\frac{1}{2G}\dot{s}_{ij} + \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{k^2}{\sqrt{II_s}}\right)s_{ij} = 0, \quad s_{ij}(t_0) = s_{ij}^0. \qquad (8.2.8)$$

Înmulțind (8.2.8) cu s_{ij} și apoi adunînd după i și j și ținînd seama că $s_{ij}s_{ij} = 2\,II_s$ și $s_{ij}\dot{s}_{ij} = \dot{II}_s$ obținem următoarea ecuație pentru II_s

$$\dot{II}_s = -\frac{2G}{\eta}\left(\sqrt{II_s} - k\right)\sqrt{II_s}, \quad II_s(t_0) = II_s^0 \qquad (8.2.9)$$

a cărei soluție este

$$\sqrt{II_s} = k + \left(\sqrt{II_s^0} - k\right)\exp\left[-\frac{G}{\eta}(t - t_0)\right] \qquad (8.2.10)$$

și prin urmare cînd $t \to \infty$, $\sqrt{II_s} \to k$. Introducînd (8.2.10) în (8.2.8) putem scrie pentru fiecare componentă s_{ij} în parte

$$\int_{s_{ij}^0}^{s_{ij}} \frac{ds_{ij}}{s_{ij}} = -\frac{G}{\eta}\int_{t_0}^{t}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{II_s(t)}}\right)dt. \qquad (8.2.11)$$

Scanned with OKEN Scanner

De unde

$$s_{ij}(t) = \frac{k}{\sqrt{II_s^0}} \left\{ 1 + \left(\frac{\sqrt{II_s^0}}{k} - 1 \right) \exp\left[\frac{G}{\eta} (t - t_0) \right] \right\} s_{ij}^0. \quad (8.2.12)$$

cînd $t \to \infty$, deviatorul tensiunii se relaxează la un punct de pe suprafața de curgere $II_s = k^2$ și acest punct este

$$s_{ij}^{\infty} = \frac{k}{\sqrt{II_s^0}} s_{ij}^0 \quad (8.2.13)$$

Acest rezultat are o strînsă legătură cu teorema din Cap. VI, §4, deși așa cum este enunțată teorema respectivă nu apare ca o consecință directă a acesteia. Aceasta se datorează faptului că acolo s-a pus condiția ca starea (e_{ij}^0, s_{ij}^0) să ajungă în timp finit în starea $(e_{ij}^0, s_{ij}^{\infty})$.

Ecuația (8.2.5) a fost generalizată în diferite moduri pentru a o face aptă să descrie mai multe fenomene reale. Astfel Perzyna [1963a], pentru a mări numărul funcțiilor și a constantelor de material, introduce notația

$$F = \frac{\sqrt{II_s}}{k} - 1.$$

Apoi introduce o funcție $\Phi(F)$ care satisface condițiile

$$\begin{aligned} \Phi(F) &= 0 \quad \text{dacă } F \leqslant 0 \\ \Phi(F) &\neq 0 \quad \text{dacă } F > 0 \end{aligned} \quad (8.2.14)$$

și postulează ecuația (8.2.5) sub forma

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \gamma \Phi(F) \frac{s_{ij}}{\sqrt{II_s}} \quad (8.2.15)$$

unde γ este o constantă a materialului. Tot Perzyna [1963 b] pentru a descrie efectul de ecruisare, alege

$$F = \frac{f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{VP})}{\varkappa} - 1 \quad (8.2.16)$$

cu $\varkappa$ o funcție de lucrul mecanic vîscoplastic, adică o funcție de argumentul

$$\int_0^{\varepsilon_{ij}^{VP}} \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij}^{VP}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru discuții asupra altor proprietăți ale modelului (8.2.5), a domeniului său de aplicabilitate și pentru bibliografie vezi de exemplu Cristescu [1967] Cap. X §1, Freudenthal [1958], Banerjee și Malvern [1974].

§3. Modelul cvasiliniar

Pornind de la modelul cvasiliniar discutat în Cap. III și urmînd calea formală de generalizare utilizată în teoria clasică a plasticității (vezi de exemplu Hill [1950] Cap. II), ecuația constitutivă unidimensională (1.2.1) se poate generaliza sub forma

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{3k(\bar{\varepsilon})}{2E}\left[1 - \frac{f(\bar{\varepsilon})}{\sqrt{3}\sqrt{II_s}}\right]s_{ij} + \frac{3\Phi(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon})}{4II_s}s_{kl}\dot{s}_{kl}s_{ij} \qquad (8.3.1)$$

unde $\bar{\sigma} = \sqrt{3}\sqrt{II_s}$ și $\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{II_e}$ sînt „tensiunea echivalentă" și respectiv „deformația echivalentă", iar f și Φ sînt funcții definite în Cap. II, §2 (unde desigur componentele unidimensionale ε și σ se înlocuiesc cu $\bar{\varepsilon}$ și $\bar{\sigma}$). La (8.3.1) se atașează și legea de compresibilitate a volumului

$$\sigma = 3K\varepsilon. \qquad (8.3.2)$$

Aceasta este doar una din generalizările posibile ale ecuației constitutive unidimensionale (1.2.1). Alte aspecte cum ar fi cele referitoare la alegerea ecuației suprafeței de relaxare, sau a mai multor suprafețe de relaxare, a altor generalizări pentru coeficientul Φ etc., pot fi eventual considerate (vezi și Cristescu [1967] [1974 a]).

Unele generalizări ale ecuației constitutive cvasiliniare pot eventual descrie și proprietăți de dilatanță pentru volum, de exemplu (Frank și Guellec [1974])

$$3K\varepsilon = \sigma + K_d\sqrt{II_s}$$

unde K_d este coeficientul de dilatanță, constant sau variabil etc.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IX

Aplicații la prelucrarea metalelor: teoria tragerii

§1. Introducere

Toate teoriile de tragere (sau trefilare) au utilizat pînă în prezent teoriile clasice ale plasticității (vezi cărțile lui Olszak, Perzyna și Sawczuk [1970], Sokolovschi [1954], Hill [1950], Avitzur [1968], Johnson, Sowerby și Haddow [1970], Tomlenov [1972], Pugh [1970], Kacianov [1974], Thomsen, Yang, Kobayashi [1968], Calladine [1969], Ford [1963] Johnson și Mellor [1962]) etc. Au fost făcute și încercări de a descrie influența vitezei de deformare asupra procesului de trefilare. În aceste încercări după obținerea formulelor cu ajutorul teoriilor clasice ale plasticității, influența vitezei de deformare era considerată printr-un factor corector. De exemplu Avitzur [1967] înlocuiește în formulele finale obținute pentru tensiunea de tragere limita de plasticitate (constantă) cu tensiunea efectivă (al doilea invariant al deviatorului tensiunilor) pe care apoi o presupune a fi dependentă de al doilea invariant al vitezei de deformare.

În prezentul capitol tragerea (sau extruderea) barelor circulare va fi descrisă cu ajutorul unei teorii foarte simple de tip rate. Principalul obiectiv al prezentei teorii este să descrie influența vitezei de tragere asupra întregului proces al tragerii (sau extruderii). Se va arăta că formulele obținute pot fi în particular folosite și în cazul vitezelor de tragere foarte mici, cînd ele de fapt se reduc la formulele ce s-ar

fi obținut cu ajutorul unui model perfect plastic, independent de timp. Prezenta expunere urmează îndeaproape lucrările lui Cristescu [1975 b] [1976].

Vom presupune că proprietățile mecanice dominante ale materialului pot fi descrise cu ajutorul unei ecuații constitutive vîscoplastice. Deoarece partea elastică a deformației va fi neglijată modelul cel mai simplu ce poate fi considerat este o ecuație constitutivă de tip Bingham de forma

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\eta} \left\langle 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{3}\sqrt{II}} \right\rangle s_{ij} \tag{9.1.1}$$

unde $\dot{\varepsilon}_{ij}$ sînt componentele vitezelor de deformare (definite prin (9.1.7)), η este coeficientul constant de „vîscozitate", adică este o măsură a influenței vitezei de deformare asupra curbelor caracteristice ale materialului considerat, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ este deviatorul tensiunilor, $II_s = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}$ este al doilea invariant al deviatorului tensiunilor (indicii repetați sînt indici de sumare), iar λ este în general parametrul de ecruisare dar mai jos el va fi presupus constant și de fapt egal cu limita „medie" de plasticitate la întindere σ_Y. A mai fost utilizată notația

$$\langle z \rangle = \begin{cases} z & \text{dacă } \sqrt{II_s} > \dfrac{\lambda}{\sqrt{3}} \\ 0 & \text{dacă } \sqrt{II_s} \leqslant \dfrac{\lambda}{\sqrt{3}} \end{cases} \tag{9.1.2}$$

Astfel pentru stările de tensiune ce satisfac inegalitatea $(9.1.2)_1$ răspunsul modelului este vîscoplastic iar dacă este satisfăcută $(9.1.2)_2$ modelul este rigid.

A doua presupunere ce va fi făcută este că matrița conică circulară rămîne rigidă în timpul curgerii plastice și că în domeniul unde are loc curgerea plastică (domeniul *II* din fig. 9.1.1) procesul este axial simetric. Făcînd o presupunere de constanță pentru volum (Avitzur [1968], Pugh [1970], Renne [1965], Makusok și alții [1973]) se poate obține următorul cîmp de viteze în coordonate sferice r, θ, φ

$$v = v_r = -v_f r_f^2 \frac{\cos\theta}{r^2}, \quad v_\theta = v_\varphi = 0 \tag{9.1.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

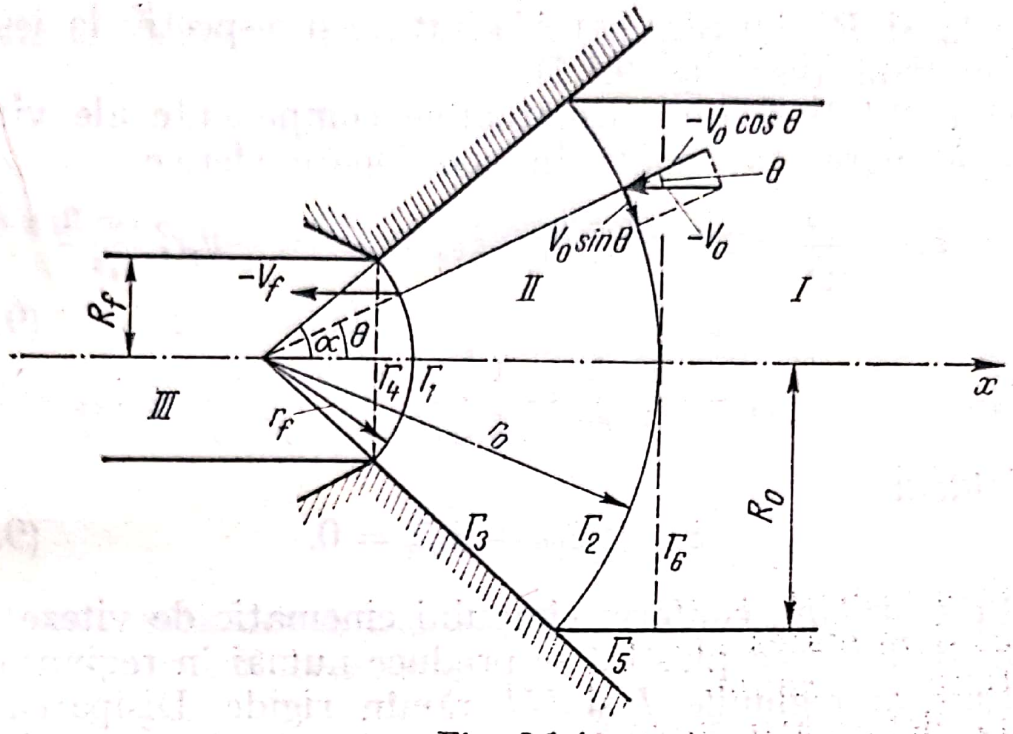


Fig. 9.1.1

în domeniul II definit de $r_0 < r < r_f : 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, unde α este semiunghiul matriței. Conform relației (9.1.3) particulele materiale se mișcă radial spre apexul 0. Deoarece în domeniul I (pentru $r \geqslant r_0$) întreaga bară se mișcă ca un corp rigid cu viteza absolută v_0 și deoarece în domeniul III (pentru $r \leqslant r_f$; extinderea cilindrică a matriței nu va fi luată aici în considerare deși considerarea ei în teorie nu pune probleme deosebite) bara de asemenea se mișcă ca un corp rigid cu viteza absolută v_f, suprafețele sferice $r = r_0$ și $r = r_f$ sînt suprafețe de discontinuitate pentru cîmpul de viteze. De-a lungul suprafeței Γ_2 $(r = r_0)$ discontinuitatea tangențială a cîmpului vitezelor se obține din (9.1.3) sub forma

$$v_t = v_0 \sin\theta \quad \text{de-a lungul lui} \quad r = r_0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha \tag{9.1.4}$$

iar de-a lungul suprafeței $\Gamma_1 (r = r_f)$ discontinuitatea tangențială a vitezei este

$$v_t = -v_f \sin\theta \quad \text{de-a lungul lui} \quad r = r_f,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha. \tag{9.1.5}$$

Vor mai fi folosite formulele evidente

$$v_0 R_0^2 = v_f R_f^2, \quad r = \frac{R}{\sin\alpha} \tag{9.1.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde R_0 și R_f sînt raza barei la intrare și respectiv la ieșirea din matriță (vezi fig. 9.1.1).

Din (9.1.3) rezultă următoarele componente ale vitezei de deformare, exprimate în coordonate sferice

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial v}{\partial r} = 2v_f r_f^2 \frac{\cos\theta}{r^3}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{v}{r} = -v_f r_f^2 \frac{\cos\theta}{r^3}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{v}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{1}{2r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{2} v_r r_f^2 \frac{\sin\theta}{r^3}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi} = \dot{\varepsilon}_{\theta\varphi} = 0 \tag{9.1.7}$$

și evident

$$\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = 0. \tag{9.1.8}$$

Prin urmare, conform cîmpului cinematic de viteze presupus deformarea plastică se produce numai în regiunea *II*, în timp ce regiunile *I* și *III* rămîn rigide. Disiparea datorită deformării vîscoplastice are loc în întreg volumul regiunii *II* și va fi calculată pe baza legii constitutive adoptată. De-a lungul suprafeței Γ_3 a matriței disiparea este produsă de frecarea prezentă acolo. Influența discontinuității vitezei și tensiunii la traversarea suprafețelor de discontinuitate Γ_1 și Γ_2 va fi de asemenea calculată. Toți acești termeni vor fi calculați luînd în considerare atît presupunerea (9.1.3) cît și ecuația constitutivă.

Procesul va fi presupus izotermic. Vor fi neglijate efectele variației temperaturii. Materialul va fi presupus omogen.

§2. Ecuații de bază

Pentru problema considerată, ținînd seama de simetria sferică și de (9.1.7), ecuația constitutivă (9.1.1) poate fi scrisă astfel

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{3}\sqrt{II_s}}\right)\frac{2}{3}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{3}\sqrt{II_s}}\right)\frac{1}{3}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) \tag{9.2.1}$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{3}\sqrt{II_s}}\right)\sigma_{r\theta}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cel de al doilea invariant al deviatorului tensiunilor este

$$II_s = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + \sigma_{r\theta}^2. \tag{9.2.2}$$

Folosind (9.1.7) și (9.2.1) expresia acestui invariant devine

$$\sqrt{II_s} = \frac{\lambda}{\sqrt{3}} + \frac{v_f r_f^2}{r^3}\eta\sqrt{11\cos^2\theta + 1}. \tag{9.2.3}$$

Este evident că în tot domeniul II

$$\sqrt{II_s} > \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \tag{9.2.4}$$

adică este satisfăcută condiția de încărcare pentru modelul rigid / vîscoplastic considerat.

Un alt grup de ecuații ce trebuie să fie satisfăcute de variabilele ce intervin în problemă, sînt ecuațiile de echilibru. Deoarece din (9.1.7) și (9.2.1) rezultă $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ și deoarece problema este axial simetrică în raport cu φ, sistemul de ecuații de echilibru se reduce la

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \sigma_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta}{r} = 0 \\ &\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{3\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \end{aligned} \tag{9.2.5}$$

Din (9.1.7), $(9.2.1)_3$ și (9.2.3) obținem

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{11\cos^2\theta + 1}}\frac{\lambda}{\sqrt{3}} + \eta v_f r_f^2\frac{\sin\theta}{r^3} \tag{9.2.6}$$

ce satisface condiția ca $\sigma_{r\theta} = 0$ pentru $\theta = 0$. Introducînd (9.2.6) în $(9.2.5)_2$ se obține o ecuație diferențială pentru $\sigma_{\theta\theta}$, care prin integrare conduce la

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{11}}\ln\left(\cos\theta + \sqrt{\frac{1}{11} + \cos^2\theta}\right) + C(r) \tag{9.2.7}$$

unde C este o funcție ce depinde doar de r și este deocamdată nedeterminată.

Scanned with OKEN Scanner

Oricare dintre primele două ecuații din (9.2.1) luate împreună cu (9.1.7), (9.2.3) și (9.2.7) conduc la

$$\sigma_{rr} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{11}} \ln\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + \frac{1}{11}}\right) +$$

$$+ C(r) + 2\sqrt{3}\lambda \frac{\cos\theta}{\sqrt{11\cos^2\theta + 1}} + 6v_f r_f^2 \eta \frac{\cos\theta}{r^3}. \quad (9.2.8)$$

Prin urmare cele trei componente ale tensiunii (9.2.6), (9.2.7) și (9.2.8) au fost deduse din cîmpul de viteze (9.1.3), din ecuația constitutivă (9.2.1) și din ecuația de echilibru $(9.2.5)_2$. Componentele σ_{rr} și $\sigma_{\theta\theta}$ depind de funcția $C(r)$, deocamdată nedeterminată, ce are semnificația fizică a unei presiuni hidrostatice. Să determinăm această funcție pentru o valoare particulară a lui θ, de exemplu $\theta = 0$. Dacă încercăm să determinăm această funcție din condiția ca ecuația $(9.2.5)_1$ să fie satisfăcută, obținem o ecuație diferențială pentru $C(r)$. În general, nu este posibil ca această ecuație diferențială să fie satisfăcută exact într-un mod nebanal. Totuși, dacă θ este mic (adică punînd deocamdată $\cos\theta \approx 1$) o putem integra și obținem

$$C(r) = -\frac{4}{3} v_f r_f^2 \eta \frac{1}{r^3} - \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \frac{168}{12^{3/2}} \ln r + C_1 \quad (9.2.9)$$

unde C_1 este o constantă de integrare ce este determinată din condiția

$$\left.\begin{matrix} r = r_0 \\ \theta = 0 \end{matrix}\right\} : \sigma_{rr} = \sigma_{xb}.$$

Se obține astfel pentru C_1

$$C_1 = \sigma_{xb} - \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{11}} \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{11}}\right) - \frac{14}{3} \frac{v_f r_f^2 \eta}{r_0^3} +$$

$$+ \frac{\lambda}{\sqrt{3}} 4{,}04145 \ln r_0 - \lambda. \quad (9.2.10)$$

Deoarece în general unghiurile matrițelor ce intervin în problemele practice sînt de obicei relativ mici, scriind acum $\cos\theta = 1 - \varepsilon$, cu $\varepsilon > 0$ un parametru mic, se poate arăta că

Scanned with OKEN Scanner

valorile C_1 și C ce au fost determinate, introduc o eroare de aproximativ 1% pentru $0 \leqslant \theta \leqslant 20°$ (deoarece dezvoltînd în serie în raport cu ε, factorul ce înmulțește pe ε este cu un ordin de mărime mai mic decît termenul ce nu conține pe ε; în general chiar pentru ε obținem $\varepsilon < 0{,}1$ etc.). Prin urmare se va presupune că valorile lui C_1 și C, care au fost introduse în (9.2.8) și (9.2.7) determină cu o bună aproximație pe σ_{rr} și $\sigma_{\theta\theta}$. De exemplu pentru $\sigma_{\theta\theta}$ obținem

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{11}} \ln\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + \frac{1}{11}}\right) - \frac{v_f r_f^2 \eta}{3}\left(\frac{4}{r^3} + \frac{14}{r_0^3}\right) + \tag{9.2.11}$$

$$+ \frac{\lambda}{\sqrt{3}} 4{,}04145 \ln\frac{r_0}{r} + \sigma_{xb} - \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{11}} \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{11}}\right) - \lambda$$

și un procedeu similar poate fi folosit pentru determinarea lui σ_{rr}. Termenul din $C(r)$ ce a fost neglijat în (9.2.9) introduce o eroare în (9.2.11) care a fost estimată pentru $\theta = 20°$ și $r = 10\%$ ca fiind: zero pentru $R = R_0$ și aproximativ 0,07% pentru $R = R_f$. Pentru $\theta = 30°$ și $r = 10\%$, această eroare este din nou zero pentru $R = R_0$ și aproximativ 0,05% pentru $R = R_f$. Aceste două componente ale tensiunii împreună cu (9.2.6) reprezintă un cîmp de tensiuni ce a fost dedus din condiția ca cîmpul de viteze (9.1.3) cinematic admisibil să fie compatibil cu ecuația constitutivă (9.2.1) și cu ecuația de echilibru (9.2.5). În obținerea acestui cîmp de tensiuni nu s-a ținut seama nici de condițiile de frecare de-a lungul lui Γ_3 (presupunerea (9.1.3) nu ține nici ea seama de aceste condiții) și nici de condițiile la limită de-a lungul lui Γ_1 și Γ_2. Deci (9.2.11) nu este propriu zis o „soluție" în domeniul II; în cele ce urmează (9.2.11) va fi admisă ca o estimare aproximativă a presiunii pe peretele matriței (pentru $\theta = \alpha$), în cazul utilizării unei legi de frecare de tip Coulomb. și unghiuri α mici. În cazul utilizării altor legi de frecare, (9.2.11) nu va fi deloc folosită.

O altă expresie care va fi folosită în cele ce urmează este așa numita putere a tensiunii. Puterea tensiunii pe unitatea de volum este dată de $\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$. Pentru ecuația cons-

Scanned with OKEN Scanner

titutivă (9.2.1) puterea tensiunii în unitatea de volum poate fi scrisă sub forma (vezi de exemplu Cristescu [1967], Cap. X)

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{2\lambda}{\sqrt{3}}\sqrt{II_{\dot{\varepsilon}}} + 4\eta II_{\dot{\varepsilon}} \tag{9.2.12}$$

unde

$$II_{\dot{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\dot{\varepsilon}_{rr}^2 + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^2 + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^2) + \dot{\varepsilon}_{r\theta}^2 + \dot{\varepsilon}_{\theta\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}_{\varphi r}^2 \tag{9.2.13}$$

Această expresie se poate obține imediat din ecuația constitutivă (9.1.1) scrisă sub forma

$$s_{ij} = k_{ij} + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij}$$

care este înmulțită cu $\dot{\varepsilon}_{ij}$ (cu sumare) și apoi se presupune o relație de tip Saint Venant pentru k_{ij}

$$k_{ij} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{3}\sqrt{\dot{\varepsilon}_{mn}\dot{\varepsilon}_{mn}}}\,\dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Folosind (9.1.7) și (9.2.13) în (9.2.12) obținem

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{2\lambda}{\sqrt{3}}\frac{v_f r_f^2}{2r^3}\sqrt{11\cos^2\theta + 1} +$$

$$+ \frac{v_f^2 r_f^4 \eta}{r^6}\,(11\cos^2\theta + 1). \tag{9.2.14}$$

Integrînd pe volumul zonei II obținem

$$\dot{W} = \int_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\,\mathrm{d}V = \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{3}}\,v_f r_f^2 \int_{r_f}^{r_0}\frac{\mathrm{d}r}{r}\int_0^{\alpha}\sqrt{11\cos^2\theta + 1}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta +$$

$$+ 2\pi v_f^2 r_f^4 \eta \int_{r_f}^{r_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^4}\int_0^{\alpha}(11\cos^2\theta + 1)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Scanned with OKEN Scanner

sau după integrare și folosind (9.1.6)

$$\dot{W} = 2\pi\lambda v_f R_f^2 \left(\ln \frac{R_0}{R_f}\right) f(\alpha) +$$

$$+ \frac{2}{3}\pi v_f^2 \eta \frac{R_f}{\sin\alpha}\left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]\left[1 - \cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{11}{3}(1 - \cos^3\alpha)\right] \qquad (9.2.15)$$

unde

$$-f(\alpha) = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sin^2\alpha}\left[(\cos\alpha)\sqrt{\cos^2\alpha + \frac{1}{11}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{11}\ln\left(\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + \frac{1}{11}}\right) -$$

$$\left. - \sqrt{\frac{12}{11}} - \frac{1}{11}\ln\left(1 + \sqrt{\frac{12}{11}}\right)\right]. \qquad (9.2.16)$$

Este interesant de observat că primul termen în membrul drept al relației (9.2.15) coincide cu puterea tensiunii obținută cu o ecuație constitutivă de tip Saint Venant-Lévy-Mises combinată cu o condiție de plasticitate pentru modele perfect plastice de tip Mises (vezi Avitzur [1968] §8.3), în timp ce al doilea termen conține disiparea suplimentară datorită „vîscozității" materialului.

§3. Legile de frecare

De-a lungul suprafeței matriței are loc o frecare importantă. Pentru a estima efectul global al acestei frecări asupra procesului curgerii plastice, se va lua în considerare faptul că ecuația constitutivă influențează legile de frecare. În orice caz tensiunea de forfecare datorită frecării de-a lungul suprafeței matriței, nu este constantă.

Există, desigur, mai multe posibilități, de a descrie frecarea de-a lungul suprafeței matriței. Mai jos vor fi folosite

Scanned with OKEN Scanner

legile de frecare tradițional folosite în prelucrarea metalelor. La început va fi considerată o lege de tip Coulomb

$$\tau = \mu\sigma_{\theta\theta} \tag{9.3.1}$$

În (9.3.1) μ este un coeficient constant de frecare iar $\sigma_{\theta\theta}$ este componenta tensiunii normală pe suprafața matriței. Aici această componentă va fi luată sub forma (9.2.11) pentru $\theta = \alpha$. Deoarece componenta radială a vitezei particulelor de-a lungul suprafeței matriței este dată de (9.1.3), adică

$$v = -v_f r_f^2 \frac{\cos\alpha}{r^2} \tag{9.3.2}$$

puterea vectorului tensiune pe suprafața conică Γ_3 a matriței ($r_0 \geqslant r \geqslant r_f$, $\theta = \alpha$) este

$$\dot{W}_{\Gamma_3} = -\mu \int_{r_0}^{r_f} \sigma_{\theta\theta} v_f r_f^2 \frac{\cos\alpha}{r^2} 2\pi r \sin\alpha \, dr \,. \tag{9.3.3}$$

Introducînd (9.2.11) în (9.3.3) și efectuînd unele transformări obținem

$$\dot{W}_{\Gamma_3} = -2\mu\pi v_f R_f^2 \operatorname{ctg}\alpha \left\{ \frac{4}{9} v_f \eta \frac{\sin\alpha}{R_f} \left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0} \right)^3 \right] - \right.$$

$$- \frac{\lambda}{\sqrt{3}} 2{,}0207 \left(\ln \frac{R_0}{R_f} \right)^2 + \ln \frac{R_f}{R_0} \left[\frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{11}} \ln \left(\cos\alpha + \right. \right. \tag{9.3.4}$$

$$\left. + \sqrt{\cos^2\alpha + \frac{1}{11}} \right) - \frac{14}{3} v_f \eta \frac{\sin\alpha}{R_0} \left(\frac{R_f}{R_0} \right)^2 + \sigma_{xb} -$$

$$\left. - \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{11}} \ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{11}} \right) - \lambda \right] \Bigg\}$$

O altă lege de frecare, folosită destul de larg în teoria proceselor de prelucrare a matalelor, presupune că dacă corpul ce se mișcă de-a lungul suprafeței rigide a matriței este în întregime în stare plastică, modulul tensiunii de forfecare datorită frecării este proporțional cu tensiunea tangențială maximă $\tau_Y = \sigma_Y/\sqrt{3}$, în cazul folosirii unui model

Scanned with OKEN Scanner

perfect plastic independent de timp. Pentru modelul vîscoplastic (9.1.1) această lege va fi generalizată sub forma

$$\tau = m\sqrt{II_s} \tag{9.3.5}$$

unde m este un coeficient constant de frecare și $0 \leqslant m \leqslant 1$. $m = 0$ înseamnă absența frecării, iar $m = 1$ înseamnă că frecarea este de ordinul de mărime al tensiunii de forfecare din interiorul corpului în timpul curgerii vîscoplastice. Cu alte cuvinte $m = 1$ înseamnă că o zonă de depunere pe matriță se poate eventual forma de-a lungul suprafeței matriței. Folosind (9.2.3), relația (9.3.5) poate fi scrisă sub forma

$$\tau = m\left[\frac{\lambda}{\sqrt{3}} + \frac{v_f r_f^2}{r^3}\eta\sqrt{11\cos^2\alpha + 1}\right] \tag{9.3.6}$$

Pentru valori foarte mici ale lui v_f această lege de frecare se reduce la cea folosită în teoria plasticității clasice (cu $\lambda = \sigma_Y$).

Cu aceeași distribuție a vitezelor ca cea dată de (9.3.2), puterea vectorului tensiune pe suprafața conică Γ_3 a matriței este

$$\dot{W}_{\Gamma_3} = 2\pi m v_f R_f^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\ln\frac{R_f}{R_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{v_f\eta\sin\alpha}{3R_f}\sqrt{11\cos^2\alpha + 1}\left[\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3 - 1\right]\right\}. \tag{9.3.7}$$

Din nou primul termen în (9.3.7) este cel ce se obține în cadrul teoriei plasticității clasice pentru corpuri perfect plastice de tip Mises.

Trebuie observat că ambele componente tangențiale ale tensiunii (9.3.1) și (9.3.5) nu sînt constante. Ele depind nu numai de limita medie de plasticitate, semiunghiul matriței α și coordonata r, dar și de viteza procesului și de vîscozitatea materialului. În general valoarea absolută a lui τ crește cu v_f, η și α. Conform lui (9.3.1) creșterea lui τ cu α este aparent liniară dacă toți ceilalți parametri ce intervin în proces sînt menținuți constanți. Dependența lui τ de r, așa cum este ea stabilită de formulele (9.3.1) și (9.3.6) este diferită; în timp ce τ dat de (9.3.1) descrește cînd r descrește (din nou, dacă toți ceilalți parametri ce intervin sînt men-

Scanned with OKEN Scanner

ținuți constanți), tensiunea tangențială τ dată de (9.3.6) crește cînd r descrește.

În toate procesele de trefilare se utilizează diverși lubrefianți pentru a micșora frecarea dintre material și peretele matriței, deși legi de frecare de acest tip sînt mai puțin considerate în calculele teoretice. Din punct de vedere mecanic lubrefiantul este un fluid vîscos. Vom presupune, într-o primă aproximație, că lubrefiantul este un fluid vîscos newtonian, satisfăcînd deci o ecuație constitutivă de forma

$$s_{ij} = 2\eta_1 \dot{\varepsilon}_{ij} \tag{9.3.8}$$

unde η_1 este coeficientul de vîscozitate al lubrefiantului, estimat pentru o temperatură și presiune cît mai apropiate de cele ce intervin în procesul de tragere. Să presupunem că grosimea h a stratului de lubrefiant este foarte mică și că variația vitezei particulelor de lubrefiant în direcția normală este mult mai mare decît în direcția tangențială la peretele matriței. Atunci putem aproxima derivata vitezei radiale v în direcția normală

$$\frac{\partial v}{\partial x} \simeq \frac{\Delta v}{h} \tag{9.3.9}$$

și notînd cu τ tensiunea tangențială pe suprafața materialului la $\theta = \alpha$ avem din (9.3.8) și (9.3.9)

$$\tau = \eta_1 \frac{\Delta v}{h}. \tag{9.3.10}$$

Vom presupune că lubrefiantul aderă la suprafața matriței (viteza lubrefiantului este nulă) și că la suprafața metalului această viteză este dată de (9.3.2). Deoarece la suprafața metalului tensiunile tangențiale (9.3.10) și (9.2.6) trebuie să fie egale, din această condiție rezultă grosimea h a lubrefiantului de-a lungul peretelui matriței

$$h = R_f \frac{\dfrac{R}{R_f}\dfrac{\eta_1 v_f}{\lambda R_f}\cos\alpha}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{11\cos^2\alpha + 1}}\left(\dfrac{R}{R_f}\right)^3 + \dfrac{\eta v_f}{\lambda R_f}\sin^2\alpha} \tag{9.3.11}$$

Conform acestei formule grosimea stratului de lubrefiant este variabilă cu R, variație care nu este însă prea importantă.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunînd grosimea acestui strat aproximativ uniformă, ea poate fi găsită printr-un criteriu global. Să notăm cu ε grosimea stratului de lubrefiant pe produsul final (care are deci raza $R_f - \varepsilon$). Atunci grosimea lubrefiantului în porțiunea conică este la $r = r_f$

$$h_f = \frac{\varepsilon}{\cos\alpha}. \tag{9.3.12}$$

Dintr-o condiție de constanță a volumului rezultă

$$h = h_f \frac{r}{r_f} = \frac{\varepsilon}{\cos\alpha} \frac{r}{r_f}. \tag{9.3.13}$$

Introducînd (9.3.13) și (9.3.2) în (9.3.10) se obține

$$\tau = \eta_1 \frac{v_f r_f^3 \cos^3\alpha}{\varepsilon r^3}. \tag{9.3.14}$$

Integrînd pe toată suprafața conică $\theta = \alpha$, $r_f \leqslant r \leqslant r_0$ se obține pentru puterea

$$\dot{W}_{\Gamma_3} = -\int_{r_0}^{r_f} \eta_1 \frac{v_f^2 r_f^5 \cos^3\alpha}{\varepsilon r^4} 2\pi \sin\alpha \, dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \frac{\eta_1 v_f^2 R_f^2}{\varepsilon} \operatorname{cotg}\alpha \cos^2\alpha \left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]. \tag{9.3.15}$$

Pe de altă parte puterea pe suprafața Γ_3 datorită tensiuni $\sigma_{r\theta}$ furnizată de (9.2.6) este

$$\dot{W}_{\Gamma_3} = -\int_{r_0}^{r_f} \left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{11\cos^2\alpha + 1}} \frac{\lambda}{\sqrt{3}} + \right.$$

$$\left. + \eta v_f r_f^2 \frac{\sin\alpha}{r^3} \right) v_f r_f^2 \frac{\cos\alpha}{r^2} 2\pi r \sin\alpha \, dr =$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \frac{2\pi \cos\alpha}{\sqrt{11\cos^2\alpha + 1}} v_f R_f^2 \ln\frac{R_0}{R_f} +$$

$$+ \frac{2\pi}{3} \eta v_f^2 R_f \sin\alpha \cos\alpha \left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]. \tag{9.3.16}$$

Prin urmare tensiunea tangențială (9.2.6) va satiface global condițiile la limită în cazul trefilării cu lubrefiant dacă cele

Scanned with OKEN Scanner

două expresii (9.3.15) și (9.3.16) sînt egale. De aici se obține pentru grosimea ε (S. Marin [1975])

$$\varepsilon = R_f \frac{\frac{\eta_1 v_f}{\lambda R_f} \operatorname{cotg} \alpha \cos \alpha \left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]}{\frac{\eta v_f}{\lambda R_f} \sin \alpha \left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right] + \sqrt{3} \frac{\ln \frac{R_0}{R_f}}{\sqrt{11 \cos^2 \alpha + 1}}}. \quad (9.3.17)$$

Deci grosimea stratului de lubrefiant (furnizată de (9.3.11) sau (9.3.17)) depinde de viteza procesului v_f prin intermediul a două numere adimensionale

$$\frac{\eta_1 v_f}{\lambda R_f} \quad \text{și} \quad \frac{\eta v_f}{\lambda R_f}. \quad (9.3.18)$$

Desigur că h și ε depind și de: coeficienții de vîscozitate (pentru lubrefiant și metal), limita medie de plasticitate etc.

Fără a da detalii vom menționa doar că ε furnizat de (9.3.17) este pentru procese obișnuite de tragere foarte mic (de ordinul micronilor).

§4. Teorema asupra puterii totale

Teorema asupra puterii totale se poate obține astfel (vezi de exemplu Truesdell și Toupin [1960], Sect. 217). Fie f o funcție continuă și derivabilă arbitrară și să presupunem că tensiunile σ_{ij} satisfac condițiile de echilibru. Avem

$$(f\sigma_{ij}),_i = \sigma_{ij} f,_i + f\sigma_{ij},_i = \sigma_{ij} f,_j \quad (9.4.1)$$

dacă presupunem că forțele de inerție și forțele masice sînt neglijabile. Dacă V este un domeniu arbitrar al corpului iar ∂V suprafața care îl mărginește, avem

$$\int_{\partial V} f\sigma_{ij} n_i \, dS = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dV \quad (9.4.2)$$

n_i fiind componentele normalei exterioare la ∂V. Să înlocuim acum pe f care este arbitrar (dar continuu și derivabil) cu

Scanned with OKEN Scanner

componentele v_j ale cîmpului de viteze propus (vezi (9.1.3)) și să adunăm cele trei formule astfel obținute. Obținem

$$\int_{\partial V} n_i \sigma_{ij} v_j \, dS = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dV \tag{9.4.3}$$

sau

$$\int_{\partial V} \sigma_i v_i \, dS = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, dV \tag{9.4.4}$$

cu σ_i componentele vectorului tensiunii pe ∂V iar $\dot{\varepsilon}_{ij}$ componentele vitezelor de deformare.

Să presupunem acum că există o suprafață de discontinuitate în interiorul lui V la traversarea căreia vitezele și eventual tensiunile sînt discontinui. Aplicăm formula (9.4.4) celor două domenii V_1 și V_2 separate prin suprafața Γ (vezi fig. 9.4.1), Avem, ținînd seama de notațiile din fig. 9.4.1

$$\int_{S_1} \sigma_i v_i \, dS + \int_\Gamma \sigma_i^{(1)} v_i^{(1)} \, dS = \int_{V_1} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, dV \tag{9.4.5}$$

$$\int_{S_2} \sigma_i v_i \, dS + \int_\Gamma \sigma_i^{(2)} v_i^{(2)} \, dS = \int_{V_2} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, dV \tag{9.4.6}$$

iar prin adunarea celor două formule

$$\int_{\partial V} \sigma_i v_i \, dS + \int_\Gamma (-\sigma_i^{(1)} v_i^{(1)} + \sigma_i^{(2)} v_i^{(2)}) \, dS = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, dV \tag{9.4.7}$$

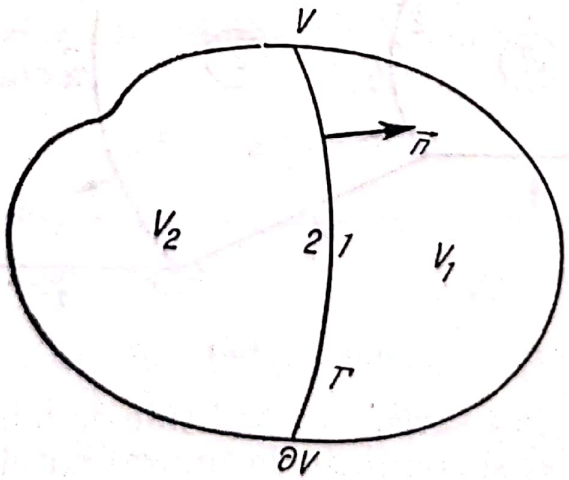


Fig. 9.4.1

Scanned with OKEN Scanner

Aici am ales convențional semnul pozitiv al normalei la Γ către regiunea V_1 (vezi fig. 9.4.1).

Să aplicăm acum formula asupra puterii totale la procesul de tragere sau trefilare, cu cîmpul de viteze dat mai sus. Vom alege sensul pozitiv al normalelor la diversele suprafețe ce intervin în acest proces ca în fig. 9.4.2. Notînd cu 1 și 2 cele două fețe ale lui Γ_1 și cu 3 și 4 cele două fețe ale lui Γ_2, teorema asupra puterii totale se scrie

$$\int_{\Gamma_1} (\sigma_i^{(1)} v_i^{(1)} - \sigma_i^{(2)} v_i^{(2)})\, dS + \int_{\Gamma_2} (\sigma_i^{(3)} v_i^{(3)} - \sigma_i^{(4)} v_i^{(4)})\, dS + \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}\, dV = \int_{\partial V} \sigma_i v_i\, dS. \tag{9.4.8}$$

Reamintim că satisfacerea relației (9.4.8) pentru un cîmp arbitrar de viteze v_i ce satisfac doar condițiile de continuitate și derivabilitate în regiunile *I*, *II* și *III*, dar care pot fi discontinue la traversarea lui Γ_1 și Γ_2, este o consecință a satisfacerii ecuațiilor de echilibru. Este important să observăm că suprafețele de discontinuitate Γ_1 și Γ_2 sînt frontiere între domeniul vîscoplastic *II* și domeniile rigide *III* și respectiv *I*.

Să vedem cum se poate calcula primul termen din (9.4.8). Vom presupune deocamdată că cîmpul de tensiuni este

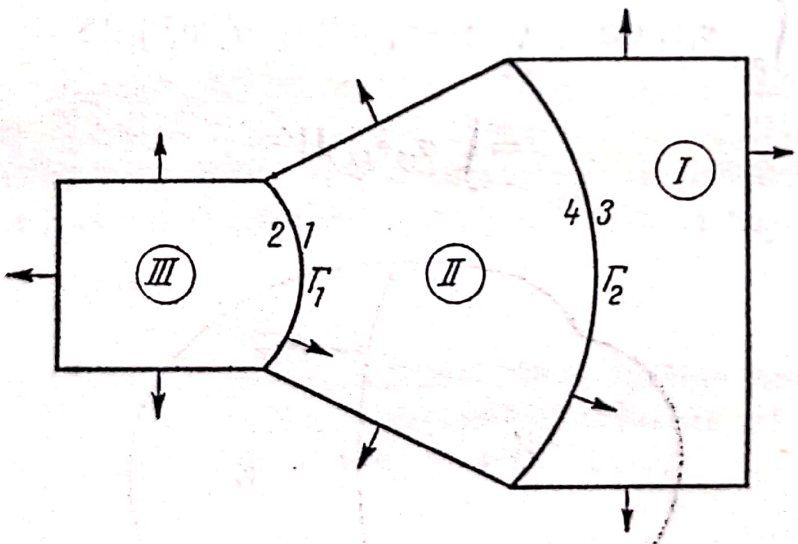


Fig. (9.4.2)

static admisibil (adică satisface condițiile de echilibru, condiția de încărcare (9.2.4) și condițiile la limită) iar cîmpul de viteze este *cinematic admisibil* (adică satisface peste tot condiția

Scanned with OKEN Scanner

de incompresibilitate și condițiile la limită în viteze). Primul termen din (9.4.8) se poate scrie

$$\int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{v}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{v}^{(2)})\, dS. \tag{9.4.9}$$

Dacă pe ambele fețe ale lui Γ_1 descompunem vectorul tensiune $\boldsymbol{\sigma}$ după normală și o componentă în planul tangent la Γ_1, adică $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_t$, (9.4.9) devine

$$\int_{\Gamma_1} \{(\boldsymbol{\sigma}_n^{(1)}\mathbf{v}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)}\mathbf{v}^{(2)} + \boldsymbol{\sigma}_t^{(1)}\mathbf{v}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}_t^{(2)}\mathbf{v}^{(2)}\}\, dS$$

sau

$$\int_{\Gamma_1} \{(\boldsymbol{\sigma}_n^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}_n^{(2)})\, \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\sigma}_t^{(1)}\mathbf{v}_t^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}_t^{(2)}\mathbf{v}_t^{(2)}\}\, dS \tag{9.4.10}$$

dacă $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_t$ iar din condiția de incompresibilitate $\mathbf{v}_n^{(1)} = \mathbf{v}_n^{(2)}$.

Să notăm cu P viteza de propagare a suprafeței de discontinuitate, adică viteza acestei suprafețe față de particulele materiale adiacente, fie de o parte a suprafeței fie de cealaltă (vezi Cristescu [1967] p. 440). Avem evident $P = -v_n$. Din condițiile de conservare a cantității de mișcare la traversarea suprafeței avem

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \rho P(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}) \tag{9.4.11}$$

unde $\boldsymbol{\sigma}$ este vectorul tensiunii de componente $\sigma_i = \sigma_{ij}n_j$ ce acționează pe suprafața Γ_1, n_j fiind versorul normalei la suprafață iar ρ densitatea de masă. Proiectînd (9.4.11) pe normală și ținînd seama că datorită incompresibilității $(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)})\, \mathbf{n} = 0$, avem

$$(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)})\, \mathbf{n} = 0. \tag{9.4.12}$$

Proiectînd (9.4.11) în planul tangent obținem

$$\boldsymbol{\sigma}_t^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}_t^{(2)} = \rho P(\mathbf{v}_t^{(2)} - \mathbf{v}_t^{(1)}). \tag{9.4.13}$$

Această relație poate fi folosită pentru a elimina din (9.4.10) fie pe $\boldsymbol{\sigma}_t^{(1)}$ fie pe $\boldsymbol{\sigma}_t^{(2)}$. Această eliminare poate fi utilă dacă cîmpul de tensiuni nu este cunoscut în domeniul *II* sau dacă cîmpul de tensiuni determinat în domeniul *II* nu este decît

Scanned with OKEN Scanner

„aproximativ" static admisibil și deci prin această înlocuire eroarea comisă poate fi micșorată. În probleme practice, de cele mai multe ori este foarte greu de determinat pentru un cîmp ales de viteze cinematic admisibil, cîmpul corespunzător de tensiuni care să fie static admisibil. În acest caz se caută cîmpul de viteze care să conducă la un cîmp de tensiuni cît mai „aproape" static admisibil (vezi Hill [1963] pentru o metodă generală privind alegerea unei soluții aproximative care nu satisface însă exact toate ecuațiile mediului continuu și vezi Avitzur [1968] pentru numeroase soluții practice obținute, cîmpul de tensiuni nefiind static admisibil).

În cazul particular al cîmpului de viteze considerat aici, deoarece $v_i^{(1)} = 0$, (9.4.10) se reduce la

$$\int_{\Gamma_1} -\boldsymbol{\sigma}_i^{(2)} \mathbf{v}_i^{(2)} \, dS \tag{9.4.14}$$

iar condiția (9.4.13) devine

$$\sigma_i^{(1)} - \sigma_i^{(2)} = -\rho v_f^2 \sin\theta \cos\theta.$$

În mod similar al doilea termen din (9.4.8) devine

$$\int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_i^{(3)} \mathbf{v}_i^{(3)} \, dS. \tag{9.4.15}$$

Prin urmare formula asupra puterii totale se scrie

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, dV - \int_{\Gamma_1} \sigma_i v_i \, dS + \int_{\Gamma_2} \sigma_i v_i \, dS = \int_{\partial V} \sigma_i v_i \, dS \tag{9.4.16}$$

unde s-a renunțat la indicii superiori, dar integralele pe Γ_1 și Γ_2 se calculează cu valorile lui σ_i obținute pe fața exterioară (domeniului *II*) a lui Γ_1 și Γ_2.

În diverse aplicații unii din termenii din (9.4.16) nu se pot calcula exact, fie din dificultăți matematice, fie din imposibilitatea de a determina experimental toți parametrii implicați în formulă. În acest caz unii dintre termeni vor fi calculați cu aproximație sau vor fi înlocuiți cu o „limită

Scanned with OKEN Scanner

superioară" în vederea estimării unei limite superioare pentru soluție. Compararea cu experiența este în aceste cazuri revelatoare.

§5. Tensiunea de tragere

În cele ce urmează va fi folosită „teorema asupra puterii totale" expusă mai sus. Să considerăm domeniul V al barei, cuprins între planele $x = r_0$ și $x = r_f \cos \alpha$ și mărginit lateral de cilindrul Γ_5 de rază R_0 și de conul circular Γ_2. În interiorul acestui domeniu am presupus existența a două suprafețe de discontinuitate ce separă domeniul vîscoplastic II de domeniile rigide I și III și care sînt situate la $r = r_0$ și $r = r_f$. Dacă forțele de volum și accelerațiile sînt neglijate, teorema asupra puterii totale este (9.4.16).

Termenul din membrul drept al relației (9.4.16) reprezintă puterea vectorului tensiune pe suprafața ce limitează domeniul V. Acest termen poate fi descompus în patru părți. Pe planul Γ_6 unde $x = r_0$ avem

$$\dot{W}_{\Gamma_6} = -\pi R_0^2 v_0 \sigma_{xb} \tag{9.5.1}$$

iar pe Γ_4 unde $x = r_f \cos \alpha$:

$$\dot{W}_{\Gamma_4} = \pi R_f^2 v_f \sigma_{xf}. \tag{9.5.2}$$

De-a lungul lui Γ_5 puterea tensiunii este egală cu zero deoarece această suprafață este presupusă a fi lipsită de tensiune (dacă această situație nu are loc, ca de exemplu în procesele de extrudere hidrostatică, atunci termenul suplimentar poate fi ușor adăugat formulei (9.4.16)). În sfîrșit de-a lungul suprafeței matriței puterea vectorului tensiune este dată fie de (9.3.4), fie de (9.3.7) fie de (9.3.16) conform legii de frecare alese.

Să considerăm acum termenul din membrul stîng al relației (9.4.16). Primul a fost deja calculat și este dat de (9.2.15). Ultimul poate fi calculat luînd în considerare faptul că la traversarea lui Γ_2 componenta normală a vitezei particulelor este continuă, în timp ce componenta tangențială paralelă la această suprafață este discontinuă și saltul tangențial este

$$v_t = v_0 \sin \theta. \tag{9.5.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Printr-o generalizare directă a procedeului folosit de Avitzur [1968] pentru a se obține o mărginire superioară pentru acest termen, componenta de forfecare a tensiunii pe Γ_2 corespunzînd lui (9.5.3) va fi presupusă a fi mai mică decît $\sqrt{II_s}$. Deci

$$\dot{W}_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} \sqrt{II_s} v_t \, dS =$$

$$= \int_0^{\alpha} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} + \frac{v_f r_f^2}{r_0^3} \eta \sqrt{11 \cos^2 \theta + 1} \right) v_0 \sin \theta \, 2\pi r_0 \sin \theta \, r_0 \, d\theta. \tag{9.5.4}$$

Pentru o simplificare a calculelor s-a observat că în domeniul de variație a lui θ, adică $0 \leqslant \theta \leqslant 30°$, expresia $\sqrt{11 \cos^2 \theta + 1}$ este limitată astfel: $3{,}04 \leqslant \sqrt{11 \cos^2 \theta + 1} \leqslant 3{,}46$. Deoarece totdeauna $\sin^2 \theta \geqslant 0$ teorema mediei din calculul integral conduce la

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{11 \cos^2 \theta + 1} \sin^2 \theta \, d\theta = \sqrt{11 \cos^2 \theta_1 + 1} \int_0^{\alpha} \sin^2 \theta \, d\theta$$

unde $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 30°$. Restrîngînd intervalul de integrare la $0 \leqslant \theta \leqslant 20^0$ alegem $\sqrt{11 \cos^2 \theta_1 + 1} \approx 3{,}3$. astfel încît din (9.5.4) obținem

$$\dot{W}_{\Gamma_2} = \pi v_0 r_0^2 \left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} + 3{,}3 \frac{v_0}{r_0} \eta \right) \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right). \tag{9.5.5}$$

Într-un mod similar găsim pentru Γ_1 unde $v_t = -v_f \sin \theta$

$$\dot{W}_{\Gamma_1} = \pi v_0 r_0^2 \left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} + 3{,}3 \frac{v_f}{r_f} \eta \right) \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right). \tag{9.5.6}$$

Este posibil să determinăm aceste integrale pe Γ_1 și Γ_2 pornind de la (9.4.14) și (9.4.15). Astfel avem

$$\dot{W}''_{\Gamma_1} = -\int_{\Gamma_1} \sigma_t^{(2)} v_t^{(2)} \, dS =$$

$$= -\int_0^{\alpha} (\sigma_{xf} \sin \theta) (-v_f \sin \theta) \, 2\pi r_f^2 \sin \theta \, d\theta. \tag{9.5.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$\dot{W}''_{\Gamma_1} = 2\pi v_f R_f^2 \frac{\sigma_{xf}}{\sin^2\alpha}\left(-\cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha + \frac{2}{3}\right). \tag{9.5.8}$$

În mod similar obținem pentru Γ_2 pornind de la (9.4.15)

$$\dot{W}''_{\Gamma_2} = 2\pi v_f R_f^2 \frac{\sigma_{xb}}{\sin^2\alpha}\left(-\cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha + \frac{2}{3}\right). \tag{9.5.9}$$

Este evident că (9.5.8) și (9.5.9) furnizează valori mult mai mici decît (9.5.6) și respectiv (9.5.5). Pentru unghiuri foarte mici ale matriței $\dot{W}''_{\Gamma_1}$ și $\dot{W}''_{\Gamma_2}$ sînt neglijabili.

Introducînd (9.2.15), (9.5.5), (9.5.6), (9.5.1), (9.5.2) și (9.3.4) în (9.4.16) se obține tensiunea de trefilare pentru cazul cînd este acceptată o lege de frecare de tip Coulomb

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_Y} = \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_Y} + 2f(\alpha)\ln\frac{R_0}{R_f} + \frac{2}{3}\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\frac{1}{\sin\alpha}\left[1 - \right.\\ \left. - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]\left[1 - \cos\alpha + \frac{11}{3}(1 - \cos^3\alpha)\right] +\\ + 2\mu\operatorname{cotg}\alpha\left\{\frac{4}{9}\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\sin\alpha\left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right] - \right.\\ - \frac{2{,}0207}{\sqrt{3}}\left(\ln\frac{R_0}{R_f}\right)^2 + \ln\frac{R_f}{R_0}\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\ln\left(\cos\alpha + \right.\right.\\ \left.\left. + \sqrt{\cos^2\alpha + \frac{1}{11}}\right) - \frac{14}{3}\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\sin\alpha\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3 + \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_Y} - \right.\\ \left. - 1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{11}}\right)\right]\right\} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}} + \right.\\ \left. + 3{,}3\left[\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3 + 1\right]\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\sin\alpha\right\}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right).\end{aligned} \tag{9.5.10}$$

În mod similar dacă se folosește o lege de frecare de forma (9.3.5), introducînd (9.2.15), (9.5.5), (9.5.6), (9.5.2), (9.5.1)

Scanned with OKEN Scanner

și (9.3.7) în (9.4.16) tensiunea de trefilare sau tragere se obține sub forma

$$\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_Y}=\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_Y}+2f(\alpha)\ln\frac{R_0}{R_f}+\frac{2}{3}\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\frac{1}{\sin\alpha}\left[1-\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]\left[1-\cos\alpha+\right.$$

$$\left.+\frac{11}{3}(1-\cos^3\alpha)\right]+\frac{2}{\sqrt{3}}m\operatorname{cotg}\alpha\left\{\ln\frac{R_0}{R_f}+\right.$$

$$+\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}\sqrt{11\cos^2\alpha+1}\left[1-\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]\Bigg\}+\frac{1}{\sin^2\alpha}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}+\right.$$

$$\left.+3{,}3\left[1+\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\sin\alpha\right\}\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right). \tag{9.5.11}$$

Cînd se folosesc relațiile (9.5.8) și (9.5.9), în cazul utilizării legii de frecare de tip Coulomb tensiunea de tragere este

$$\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_Y}=\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha-\cos^2\alpha-\frac{2}{3}\cos^3\alpha-\frac{1}{3}}\left\{\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_Y}\left[1+\right.\right.$$

$$\left.+2\frac{-\cos\alpha+\frac{1}{3}\cos^3\alpha+\frac{2}{3}}{\sin^2\alpha}\right]+2f(\alpha)\ln\frac{R_0}{R_f}+\frac{2}{3}\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\frac{1}{\sin\alpha}\left[1-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]\left[1-\cos\alpha+\frac{11}{3}(1-\cos^3\alpha)\right]+$$

$$+2\mu\operatorname{cotg}\alpha\left\{\frac{4}{9}\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\sin\alpha\left[1-\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]-\frac{2{,}0207}{\sqrt{3}}\left(\ln\frac{R_0}{R_f}\right)^2+\right.$$

$$+\ln\frac{R_f}{R_0}\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\ln\left(\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+\frac{1}{11}}\right)-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{14}{3}\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\sin\alpha\left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3+\frac{\sigma_{xb}}{\sigma_Y}-1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{11}}\right)\right]\right\}\right| \tag{9.5.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar în cazul utilizării unei legi de frecare de tipul (9.3.5) se obține

$$\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_Y} = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha - \cos^2\alpha - \frac{2}{3}\cos^3\alpha - \frac{1}{3}} \left\{ \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_Y} \left[1 + \right.\right.$$

$$\left. + 2\,\frac{-\cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha + \frac{2}{3}}{\sin^2\alpha} \right] + 2f(\alpha)\ln\frac{R_0}{R_f} +$$

$$+ \frac{2}{3}\,\frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\,\frac{1}{\sin\alpha}\left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]\left[1 - \cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{11}{3}\,(1 - \cos^3\alpha)\right] + \frac{2}{\sqrt{3}}\,m\,\mathrm{cotg}\,\alpha\left\{\ln\frac{R_0}{R_f} + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}\,\sqrt{11\cos^2\alpha + 1}\left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^3\right]\right\}. \quad (9.5.13)$$

Într-un mod similar se pot obține formule pentru tensiunea de tragere sau trefilare în cazul utilizării unei frecări vîscoase. Aceste formule nu vor mai fi date aici.

Urmînd procedee similare, dar rezolvînd în raport cu σ_{xb}/σ_Y, se pot obține tensiunile necesare în procesele de extrudere. În orice caz constanta C_1 din (9.2.9) va fi determinată utilizînd datele cunoscute la ieșirea din matriță (vezi Cristescu [1974b]).

Toate formulele de mai sus pot fi folosite pentru un larg interval de viteze de lucru. Dacă procesul este foarte încet, putem pune în aceste formule $v_f = 0$ și toate aceste formule pot fi folosite și pentru cazul cînd efectul vitezei se poate neglija. Aceeași observație se poate face pentru cazul cînd vîscozitatea poate fi neglijată. De fapt, pentru $v_f = 0$ formula (9.5.11) coincide cu formula (8.17a) dată în cartea lui Avitzur [1968], iar (9.5.10) practic coincide cu formula (8.36a) din aceeași carte, dacă din nou $v_f = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Este important să observăm că în toate formulele precedente termenii ce conțin pe v_f depind de fapt de parametrul adimensional

$$N = \frac{\eta v_f}{\sigma_Y R_f} \tag{9.5.14}$$

care evident este măsura eficacității influenței vitezei de tragere asupra tensiunii de tragere. Din acest motiv acest parametru va fi numit *parametrul eficacității vitezei*. Este evident din (9.5.10)—(9.5.13) că o descreștere a lui R_f va fi echivalentă cu o creștere a lui v_f. Prin urmare în acele cazuri în care R_f este foarte mic este de așteptat o importantă „influență a vitezei" asupra tensiunii de trefilare chiar dacă viteza v_f este relativ mică. O variație a lui η sau a lui σ_Y poate de asemenea să contribuie, dar într-o măsură ceva mai mică, la creșterea sau descreșterea „influenței vitezei" asupra tensiunii de trefilare. Aceste variații ale lui η sau ale lui σ_Y pot fi produse de exemplu prin schimbarea temperaturii sau prin introducerea unui cîmp ultrasonic etc.

§6. Exemple numerice și comparație cu datele experimentale

Pentru a ilustra prin exemple numerice influența vitezei asupra tensiunii de tragere au fost reprezentate curbele din fig. 9.6.1 calculate cu ajutorul formulelor (9.5.10) și (9.5.11). Aceste curbe reprezintă variația tensiunii de trefilare cu semiunghiul conului matriței pentru două reduceri ale ariei. Reducerea ariei este definită de

$$r\,\% = 100\left[1 - \left(\frac{R_f}{R_0}\right)^2\right]. \tag{9.6.1}$$

Pentru fiecare reducere au fost trasate mai multe curbe ce corespund diverselor valori ale parametrului adimensional N. Dacă valorile lui η, σ_Y și R_f sînt fixate, curbele din figura 9.6.1 reprezintă soluțiile ce se obțin pentru diverse viteze de tragere v_f. Este evident că influența unei viteze mai mari este mai pronunțată la reduceri mari și la semiunghiuri mai mari ale conului matriței. Pentru exemplul dat în fig. 9.6.1 coe-

Scanned with OKEN Scanner

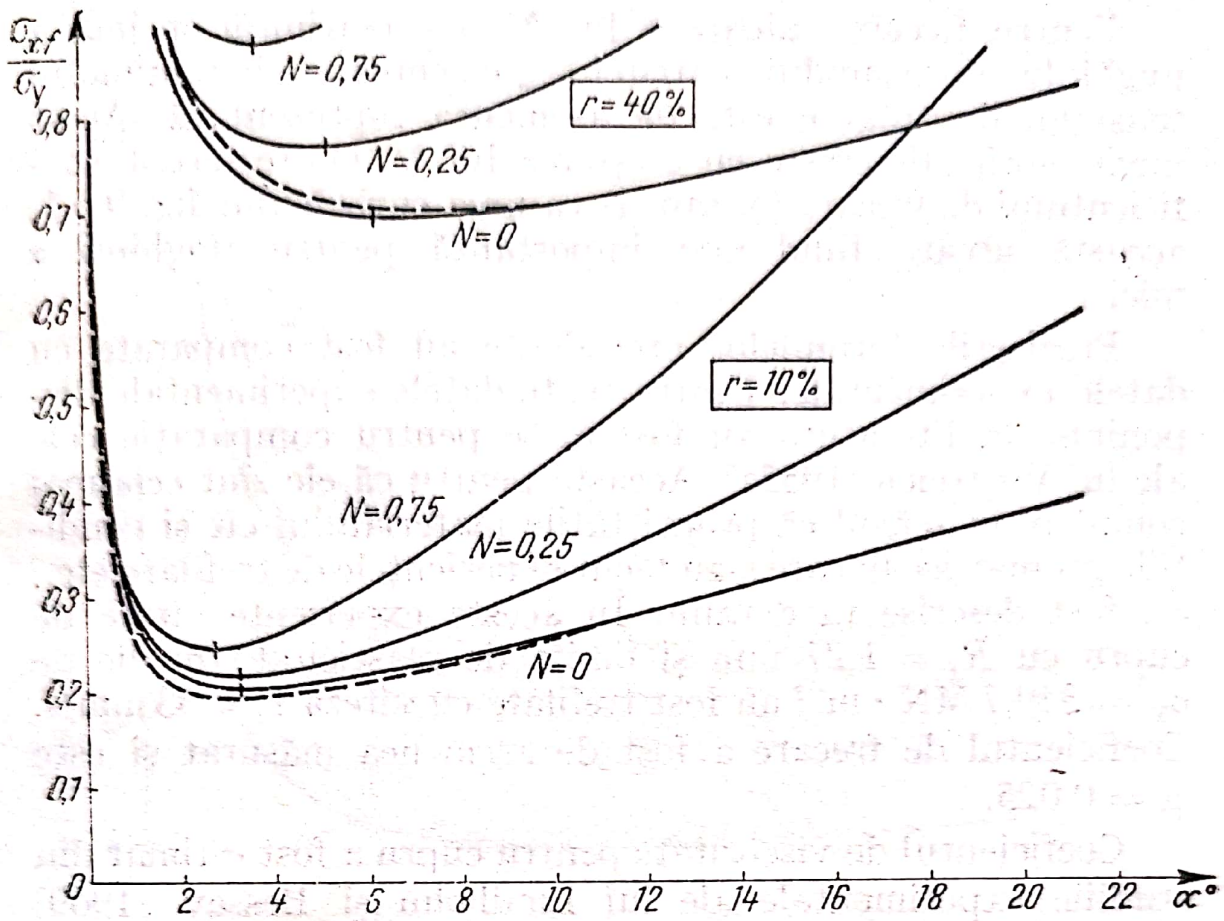


Fig. 9.6.1

ficientul de frecare μ a fost luat $\mu = 0{,}03$ iar m a fost apoi determinat din condiția ca soluțiile (9.5.10) și (9.5.11) să coincidă pentru semiunghiuri foarte mici ale matriței, atunci cînd frecarea este dominantă în sensul că cea mai mare parte a tensiunii de trefilare este utilizată pentru învingerea frecării. Astfel s-a obținut $m = 0{,}04$. Cu acest coeficient de frecare au fost obținute soluțiile (9.5.11). Deoarece aceste soluții practic coincid cu cele furnizate de (9.5.10) (linii continue în fig. 9.6.1) numai soluțiile (9.5.11) ce corespund lui $N = 0$ au fost reprezentate prin linii punctate.

Drept exemplu, pentru un anumit tip de aluminiu (vezi Cristescu [1972b] s-a utilizat pentru temperatura camerei $\sigma_Y = 156{,}8$ MN $\cdot$ m^{-2}, $\eta = 0{,}234$ MN $\cdot$ m^{-2} $\cdot$ s. Pentru aceste valori ale constantelor și dacă $R_f = 9$ mm lui $N = 0{,}25$ îi corespunde $v_f = 1506$ mm/s iar lui $N = 0{,}75$ îi corespunde $v_f = 4516$ mm/s. S-a luat $\sigma_{xb} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru fiecare valoare a lui N și r mărimea optimă a unghiului semiconului matriței α_{opt} ce corespunde minimului tensiunii de tragere este de asemenea reprezentată. Acest unghi optim descrește cu creșterea lui N. O creștere a coeficientului de frecare (m sau μ) va urca curbele din fig. 9.6.1, această urcare fiind mai importantă pentru unghiuri α mici.

Prezicerile formulelor precedente au fost comparate cu datele experimentale. Dintre toate datele experimentale disponibile în literatură au fost alese pentru comparație cele ale lui Wistreich [1955a]. Aceasta pentru că ele sînt cele mai complete în sensul că proprietățile materialului cît și condițiile geometrice în care s-au făcut experiențele de trefilare etc., au fost descrise în detaliu. În aceste experiențe sîrme de cupru cu $R_f = 1{,}27$ mm și limita de plasticitate medie de $\sigma_Y = 349{,}7\ \mathrm{MN} \cdot \mathrm{m}^{-2}$ au fost trefilate cu viteza $v_f = 33\,\mathrm{mm/s}$. Coeficientul de frecare a fost de asemenea măsurat și este $\mu = 0{,}025$.

Coeficientul de vîscozitate pentru cupru a fost estimat din studiile experimentale ale lui Lindholm și Bessey [1969] privitor la rate-sensibilitatea diverselor metale. Astfel s-a obținut $\eta = 2{,}78\ \mathrm{MN} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}$. Prin urmare pentru condițiile în care s-au făcut experiențele lui Wistreich parametrul adimensional (9.5.14) este $N = 0{,}2069$.

Cu aceste valori ale constantelor și utilizînd formula (9.5.12) au fost obținute rezultatele din fig. 9.6.2, ce reprezintă pentru diverse reduceri r variația tensiunii de trefilare cu unghiul α. Punctele reprezintă datele experimentale. În general concordanța cu datele experimentale este bună. Discrepanța care există pentru α relativ mare și/sau r mic între teorie și experiență este datorită fenomenului de bombare (în englezește: bulging). Atît Wistreich [1955 a] cît și alți autori (vezi de exemplu Ford [1963]) au arătat că acest fenomen este mai pronunțat pentru r mic și pentru unghiuri α ceva mai mari. Deoarece fenomenul bombării nu este încorporat în prezenta teorie de trefilare, o concordanță între teorie și experiență pentru r mic și/sau α mari nici nu este de așteptat.

Scanned with OKEN Scanner

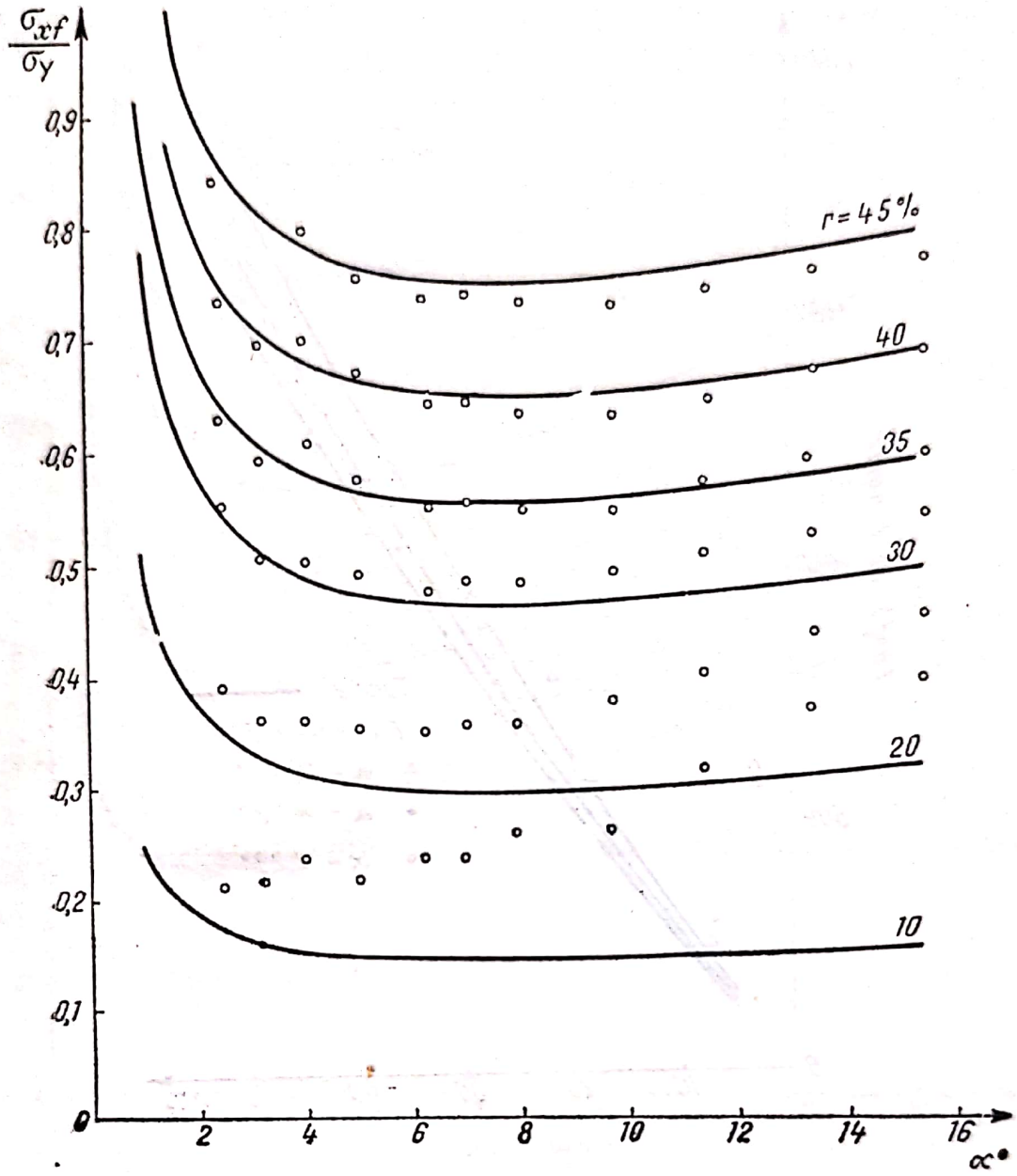


Fig. 9.6.2

O altă comparație cu datele experimentale a fost făcută pentru forța totală de trefilare, care a fost măsurată de Wistreich pentru semiunghiuri ale conului matriței de 2°28, 8°02 și 15°47. Aceste date experimentale sînt reprezentate în fig. 9.6.3 împreună cu rezultatele obținute cu formula (9.5.12) pentru semiunghiuri ale matriței avînd valori apropiate celor utilizate în experiențe. Din nou se poate constata o bună concordanță între datele experimentale și cele teo-

Scanned with OKEN Scanner

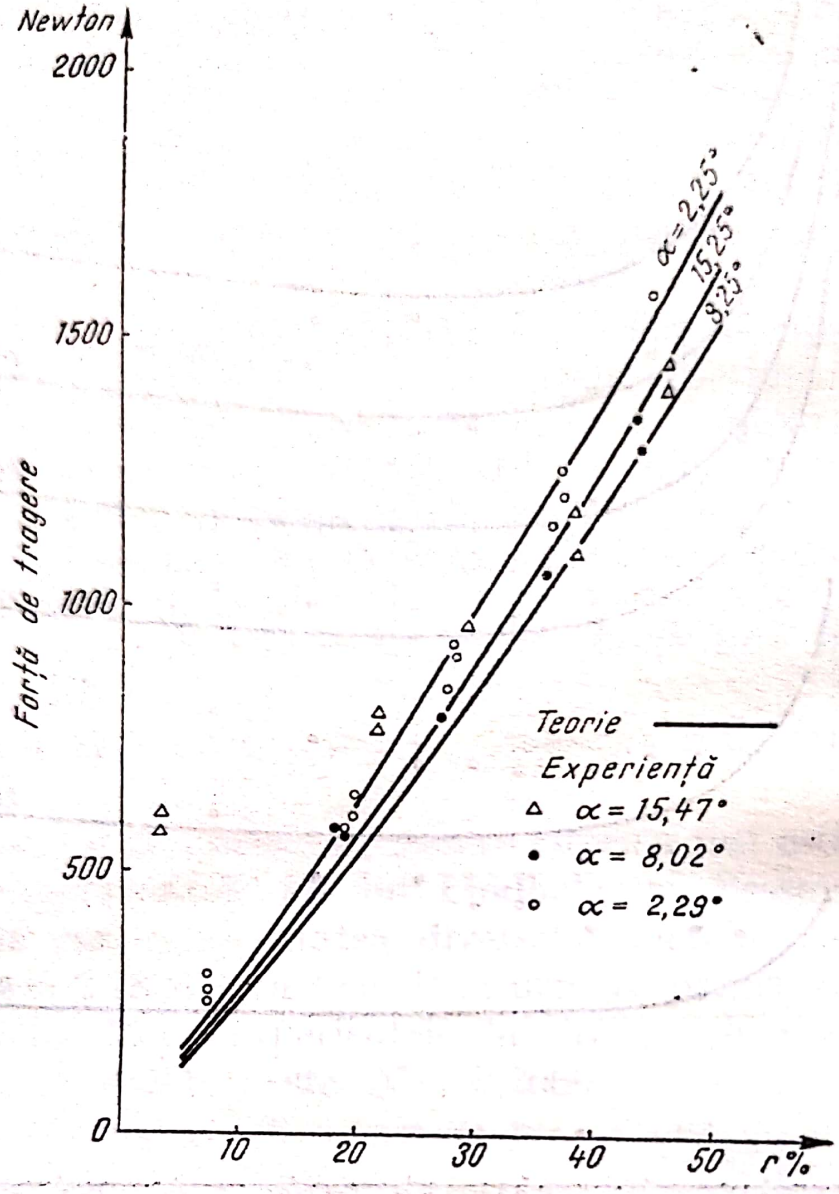


Fig. 9.6.3

retice, cu excepția datelor pentru r mici și α relativ mari, deci acolo unde este prezent fenomenul de bombare.

Compararea datelor experimentale cu formula (9.5.13) conduce la rezultate cu totul asemănătoare dacă se alege $m = 0{,}034$. Formulele (9.5.10)—(9.5.11) conduc însă la rezultate într-o concordanță mai slabă cu datele experimentale, mai ales pentru valori mai mari ale lui r, după cum rezultă din fig. 9.6.4. După cum s-a mai menționat o concordanță pentru r mic și/sau α mare nu este de așteptat din cauza fenomenului de bombare.

Scanned with OKEN Scanner

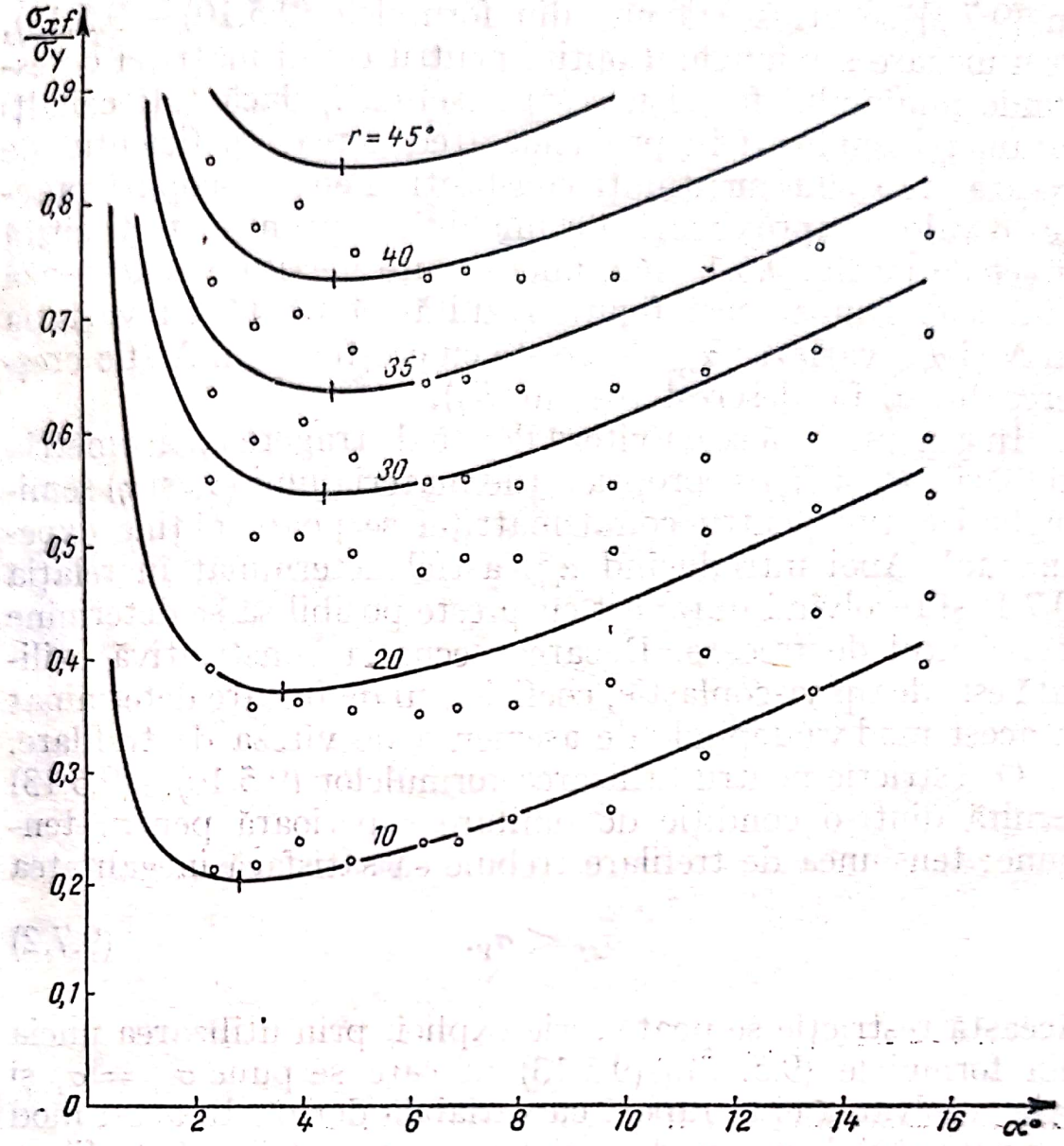


Fig. 9.6.4

§7. Observaţii

Formulele (9.5.10)—(9.5.13) pot fi utilizate pentru a descrie atît procese de trefilare rapide cît şi încete. Vom face acum unele observaţii privitoare la domeniul de aplicabilitate al acestor formule.

Pentru o geometrie de trefilare şi viteză de trefilare date, semiunghiul optim pentru conul matriţiei α_{opt} se poate obţine prin rezolvarea în raport cu α a ecuaţiei

$$\frac{\partial\left(\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_Y}\right)}{\partial\alpha} = 0. \qquad (9.7.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

În (9.7.1) se utilizează una din formulele (9.5.10)—(9.5.13). Prin urmare semiunghiul optim pentru conul matriței corespunde minimului forței necesare trefilării, dacă toți ceilalți parametri implicați în problemă (reducerea, coeficientul de frecare etc.) sînt menținuți constanți. Pentru scopuri practice o valoare aproximativă a unghiului optim poate fi citită direct de pe fig. 9.6.1 unde mici liniuțe verticale marchează minimele. Din aceeași figură rezultă că odată cu variația lui N și α_{opt} variază: α_{opt} descrește cu creșterea lui N (fie creșterea lui v_f fie descreșterea lui R_f).

În general dacă se dă viteza dorită de tragere v_f, geometria trefilării (R_0 și R_f) și proprietățile materialului (σ_Y și η) semiunghiul optim pentru conul matriței se poate obține experimental. Apoi introducînd α_{opt} astfel determinat în relația (9.7.1) și rezolvînd în raport cu μ este posibil să se determine coeficientul de frecare. Deoarece ecuația constitutivă utilizată este de tip vîscoplastic, coeficientul de frecare determinat în acest mod va depinde de asemenea de viteza de trefilare.

O restricție pentru utilizarea formulelor (9.5.10)—(9.5.13) rezultă dintr-o condiție de limitare superioară pentru tensiune: tensiunea de trefilare trebuie să satisfacă inegalitatea

$$\sigma_{xf} < \sigma_Y. \tag{9.7.2}$$

Această restricție se poate scrie explicit prin utilizarea uneia din formulele (9.5.10)—(9.5.13) în care se pune $\sigma_{xf} = \sigma_Y$ și prin rezolvarea ei în raport cu variabila dorită. În acest mod se poate găsi domeniul de variație al parametrilor de trefilare (N, r, α etc.) în care inegalitatea (9.7.2) este satisfăcută. De exemplu dacă dorim să aflăm pentru un anumit unghi α care este valoarea maximă posibilă a parametrului N (deci a vitezei) pentru diverși r, putem obține curbele critice pentru N reprezentate în fig. 9.7.1 cu ajutorul formulei (9.5.12) și a datelor numerice pentru cupru utilizate mai sus. Pentru o valoare aleasă a lui α toate stările reprezentate prin punctele ce se află sub curba corespunzătoare sînt stări de trefilare posibile. De aici, dacă proprietățile materialului (deci σ_Y și η) sînt cunoscute pentru fiecare R_f se pot obține vitezele de trefilare ce satisfac (9.7.2).

Pentru a înțelege mai bine modul în care parametrul eficacității vitezei influențează soluția de trefilare, vom porni

Scanned with OKEN Scanner

de la observația că oricare din formulele (9.5.10), (9.5.11) se poate scrie sub forma

$$\frac{\sigma_{xf}}{\sigma_Y} = S + R + F \tag{9.7.3}$$

unde S este contribuția în formulă datorită puterii tensiunii (disiparea interioară), R este lucrul suplimentar (termenul

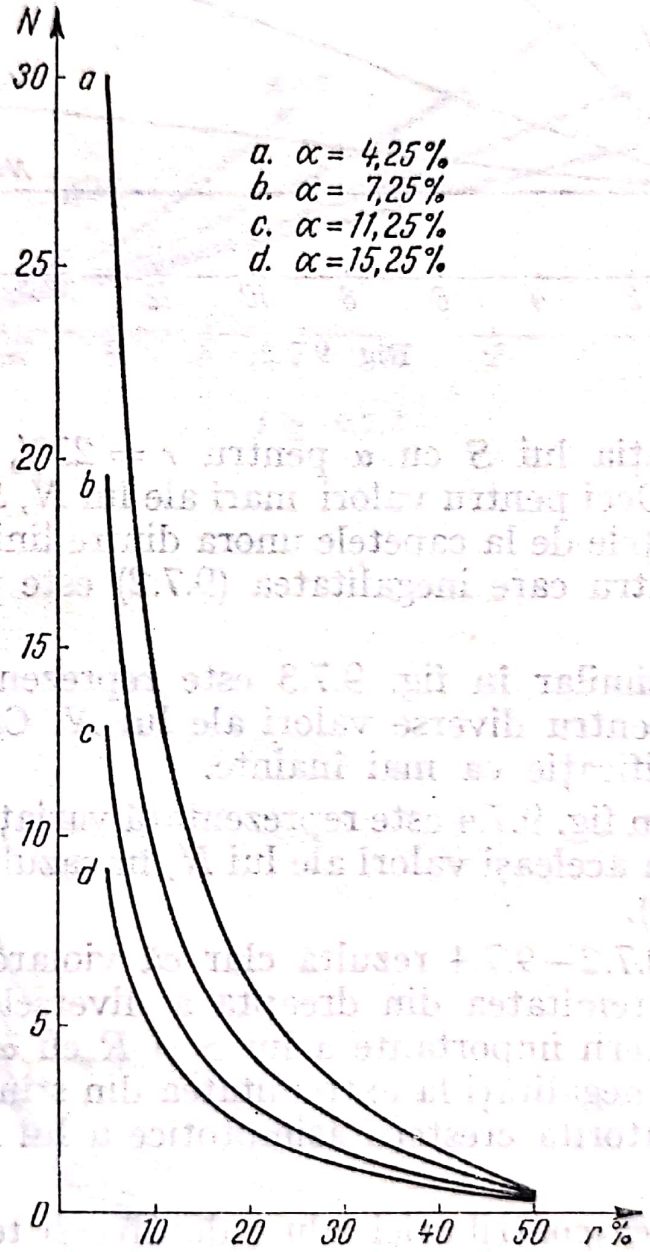


Fig. 9.7.1.

datorită discontinuității vitezei) iar F este contribuția datorită frecării. Pentru diverse valori ale lui N și utilizînd aceleași valori numerice pentru aluminiu ca cele date mai sus, s-a

Scanned with OKEN Scanner

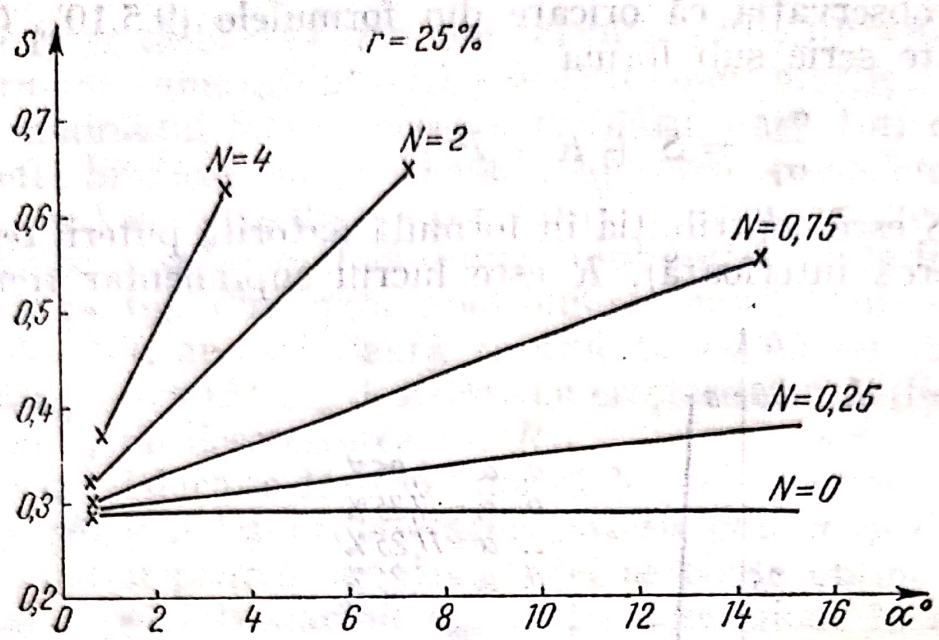


Fig. 9.7.2.

obținut variația lui S cu α pentru $r = 25\%$ reprezentată în fig. 9.7.2. Deci pentru valori mari ale lui N, S crește rapid cu α. Cruciulițele de la capetele unora dintre linii indică valorile lui α pentru care inegalitatea (9.7.2) este pentru prima oară violată.

În mod similar în fig. 9.7.3 este reprezentată variația lui R cu α pentru diverse valori ale lui N. Cruciulițele au aceeași semnificație ca mai înainte.

În sfîrșit în fig. 9.7.4 este reprezentată variația termenului F cu α pentru aceleași valori ale lui N, în cazul utilizării formulei (9.5.10).

Din fig. 9.7.2—9.7.4 rezultă clar că violarea inegalității (9.7.2) la extremitatea din dreapta a diverselor curbe este datorită creșterii importante a lui S și R cu α, pe cînd violarea acestei inegalități la extremitatea din stînga a acelorași curbe este datorită creșterii asimptotice a lui F cu descreșterea lui α.

Compararea contribuției aduse de diverși termeni atunci cînd se utilizează fie formula (9.5.10) fie formula (9.5.12) este făcută în fig. 9.7.5 pentru $r = 35\%$ și datele numerice pentru cupru menționate mai sus. Soluția obținută cu ajutorul formulei (9.5.12) a fost notată cu I iar cea obținută cu (9.5.10) cu II. Prin cerculețe pe grafic au fost reprezentate

Scanned with OKEN Scanner

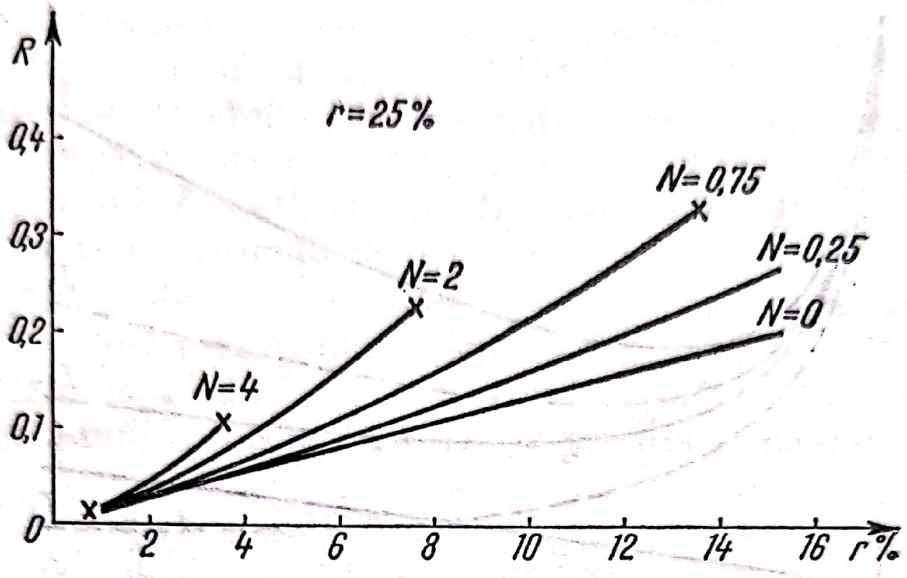


Fig. 9.7.3

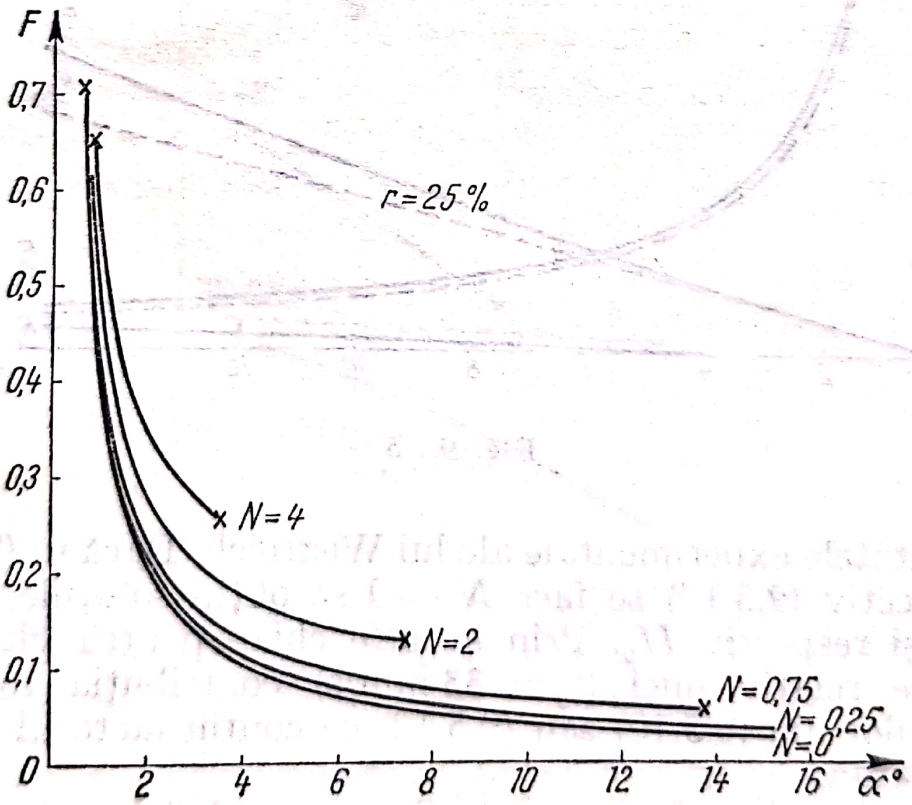


Fig. 9.7.4

Scanned with OKEN Scanner

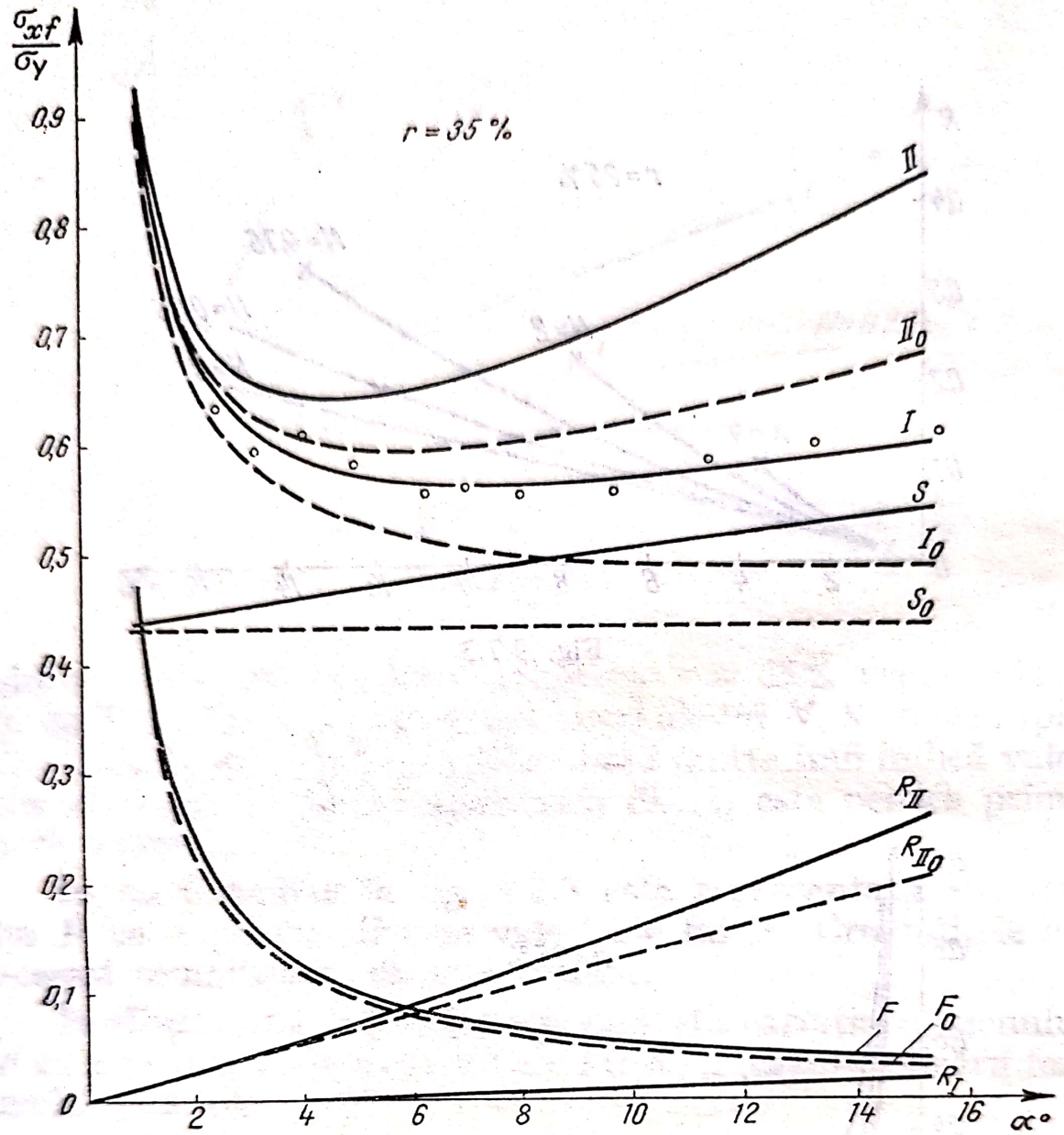


Fig. 9.7.5

și rezultatele experimentale ale lui Wistreich. Dacă în (9.5.12) și respectiv (9.5.10) se face $N \to 0$ se obțin soluțiile notate cu I_0 și respectiv II_0. Prin urmare chiar pentru viteze de trefilare relativ mici ($v_f = 33$ mm/s) contribuția totală a termenilor din (9.5.10) sau (9.5.12) ce conțin factorul v_f este importantă.

Contribuția puterii tensiunii (sau disipării interne) în formula (9.5.12) sau (9.5.10) a fost reprezentată pe aceeași figură prin curba S. Din nou dacă $N \to 0$ această contribuție pentru viteze neglijabil de mici devine S_0, care este aproape

Scanned with OKEN Scanner

constantă cu α. Similar, contribuția termenilor datorită frecării pentru $N = 0{,}2069$ este reprezentată prin curba F iar pentru $N \to 0$ se obține curba F_0. Prin urmare pentru exemplul numeric considerat aici „influența vitezei" asupra lui F este relativ mică. În sfîrșit lucrul suplimentar datorită prezenței suprafețelor de discontinuitate este reprezentat prin R_I pentru formula (9.5.12) și prin R_{II} pentru formula (9.5.10). Dacă $N \to 0$, curba R_{I_0} coincide cu R_I în timp ce R_{II_0} se obține distinctă de R_{II}.

Pentru a ilustra „influența vitezei" asupra presiunii pe matriță a fost reprezentată fig. 9.7.6 pentru $\alpha = 5°$ și utilizînd formula (9.2.11) și constantele pentru aluminiu date mai sus. Liniile pline arată variația presiunii locale pe matriță

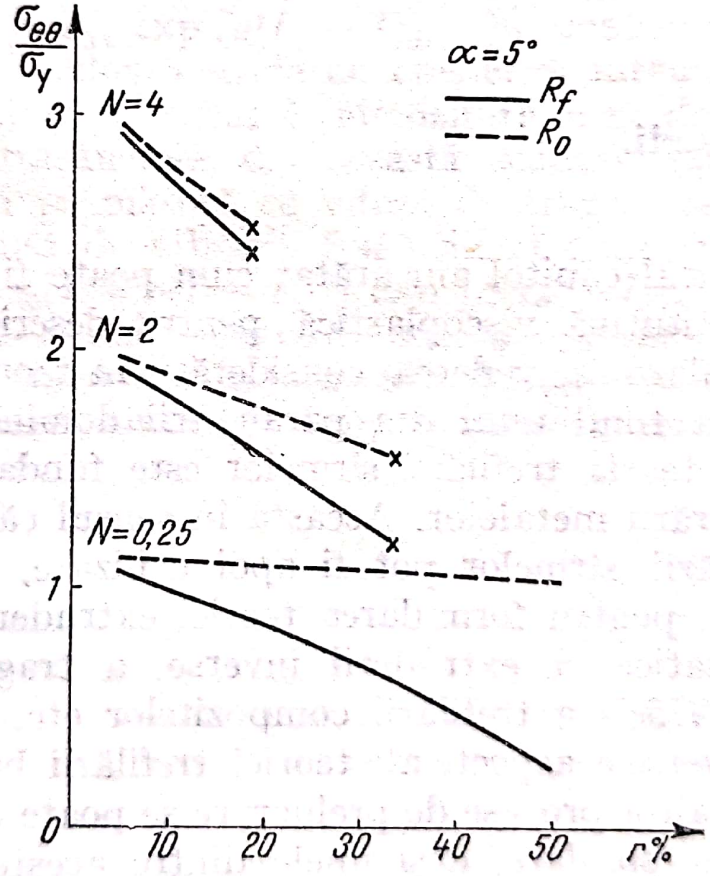


Fig. 9.7.6

la $R = R_f$ iar liniile punctate indică aceeași variație la $R = R_0$, ambele pentru diverse valori ale lui N. Deci pentru reduceri mici presiunile la intrarea și ieșirea din matriță sînt aproape egale, iar pentru valori mari ale reducerii r există

Scanned with OKEN Scanner

o diferență sensibilă între aceste două presiuni. O altă concluzie ce se poate trage este aceea că presiunea pe matriță la intrare este în general mai mare decît la ieșire. În fig. 9.7.6 au fost reprezentate doar acele porțiuni ale curbelor pentru care inegalitatea (9.7.2) este satisfăcută.

În sfîrșit este important să subliniem din nou că „influența vitezei" în teoria tragerii sau trefilării este resimțită prin intermediul parametrului adimensional N. Cu alte cuvinte chiar dacă viteza de trefilare este relativ mică, așa numitul „efect de tip rate" poate fi important dacă R_f este mic. Această concluzie teoretică ce rezultă din (9.5.10)—(9.5.13) a fost observată și experimental (vezi de exemplu Wistreich [1955b]).

§8. **Concluzii.**

În prezentul capitol am arătat cum poate fi utilizată o ecuație constitutivă vîscoplastică pentru descrierea procesului de trefilare, în vederea considerării în teorie a vitezei procesului ca fiind unul din parametrii dominanți. După cum se știe teoria trefilării sîrmelor este fundamentală în teoria prelucrării metalelor. Aceasta în sensul că elementele teoriei trefilării sîrmelor pot fi apoi utilizate, dezvoltate, adaptate etc. pentru formularea teoriei extruderii, a extruderii hidrostatice, a extruderii inverse, a tragerii țevilor (Cristescu [1975c]) a trefilării compozitelor etc. Deci odată precizate diversele aspecte ale teoriei trefilării barelor cilindrice, teoria altor procese de prelucrare se poate obține utilizînd procedee similare, deși unele dintre aceste teorii pot implica destule dificultăți adiționale specifice procesului respectiv.

În teoria prezentată vîscozitatea materialului (constanta η este de fapt o măsură a efectului vitezei de deformare pentru materialul respectiv) influențează nu numai puterea tensiunii ci și condițiile de frecare și lucrul suplimentar.

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunea de trefilare crește cu viteza de prelucrare. Reamintim totuși că întregul proces de trefilare depinde de viteza de trefilare prin intermediul parametrului adimensional N numit „parametrul eficacității vitezei". Deci toate elementele teoriei trefilării (tensiunea de trefilare, α_{opt}, v_{cr}, presiunea pe matriță etc.) vor depinde într-o măsură mai mare sau mai mică de N și nu de valoarea absolută a lui v_f.

Vom mai remarca că toate formulele obținute sînt aplicabile și în cadrul teoriei plasticității clasice dacă în aceste formule facem $N \to 0$.

Formulele de mai sus au fost aplicate și pentru tragerea în cîmp ultrasonic (Cristescu [1974 c]). În acest scop s-au făcut următoarele presupuneri: a) limita de plasticitate scade exponențial cu creșterea intensității cîmpului ultrasonic ($\sigma_Y(I) = \sigma_{Y0} \exp [a(I_0 - I)]$); b) coeficientul de frecare al lui Coulomb scade cu creșterea intensității ultrasunetelor; c) coeficientul de vîscozitate în modelul Bingham scade cu ultrasunetele, dar această scădere este din ce în ce mai mică pe măsură ce viteza de tragere se apropie de viteza produsă de vibrații. S-a utilizat astfel relația empirică $\eta(I) = \eta_0[1 + b(I - I_0)^c] \exp [a(I_0 - I)]$, unde $a > 0$, $b > 0$ și $c > 0$ sînt constante ale materialului. Cu aceste presupuneri introduse în formulele deduse mai sus s-a putut descrie scăderea forței de tragere datorită aplicării cîmpului ultrasonic.

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 1

Metode numerice de integrare și programe pentru calculator utilizate pentru studiul datelor experimentale

§1. Introducere

După cum se știe, aspectul cel mai dificil în rezolvarea oricărei probleme în teoria plasticității este găsirea frontierei elasto/plastice. În regiunea elastică sistemul de ecuații cu derivate parțiale ce descrie deformarea este distinct de sistemul cvasiliniar cu derivate parțiale ce trebuie să fie satisfăcut în regiunea plastică. În problemele dinamice, problema este și mai dificilă nu numai datorită prezenței forțelor de inerție, ce intervin în acest caz, dar și pentru că trebuiesc utilizate uneori ecuații constitutive de tip rate.

În capitolele precedente au fost prezentate mai multe soluții obținute numeric fie utilizîndu-se ecuații constitutive clasice, fie ecuații constitutive de tip rate. Pentru ambele tipuri de condiții la limită se poate studia interacțiunea dintre undele elasto-vîsco-plastice de încărcare și cele elastice de descărcare. De asemenea frontiera dintre domeniile de încărcare și descărcare se poate obține cu ajutorul metodelor numerice, pentru condiții inițiale și la limită foarte generale. Mai jos vor fi prezentate aceste metode atît pentru ecuații constitutive clasice de tipul (1.1.3) (care mai jos vor fi numite RI) cît și pentru cele de tip rate de tipul (1.2.1) (care mai jos vor fi numite RD), precum și schemele logice și programele utilizate pentru calculator, urmînd în special lucrarea Cristescu și Cristescu [1973].

Scanned with OKEN Scanner

§2. Formularea problemei

Sistemul de ecuații cu derivate parțiale ce trebuie integrat este

$$-\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Phi(\sigma, \varepsilon)\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Psi(\sigma, \varepsilon) \tag{A1.2.1}$$

cu diverse expresii pentru coeficienți date la Cap. III. Integrarea se face în banda

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad t \geqslant 0. \tag{A1.2.2}$$

Au fost introduse variabilele adimensionale

$$S = \frac{\sigma}{E}, \quad V = \frac{v}{c_0}, \quad T = Kt, \quad X = \frac{K}{c_0}x \tag{A1.2.3}$$

unde K este o constantă de dimensiune t^{-1}. K a fost uneori schimbat în timpul integrării în vederea modificării ochiului rețelei de caracteristici. Cu aceste variabile adimensionale caracteristicele (1.2.8), (1.2.9) ale sistemului (A 1.2.1) se scriu

$$\frac{dX}{dT} = \pm\frac{c}{c_0} = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\Phi}}$$
$$dX = 0 \quad \text{(de două ori)} \tag{A1.2.4}$$

De-a lungul lor sînt satisfăcute respectiv relațiile diferențiale

$$dS = \mp\frac{c}{c_0}dV - \left(\frac{c}{c_0}\right)^0 \Psi\, dT$$
$$d\varepsilon^P = \Phi\, dS + \Psi\, dT \tag{A1.2.5}$$
$$d\varepsilon^E = dS$$

unde coeficienții $\Psi = \frac{\Psi}{K}$, $\Phi = E\Phi$ sînt de asemenea adimensionali. Semnele superioare și inferioare în (A1.2.4) și (A 1.2.5) se corespund.

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile inițiale și la limită au fost discutate în Cap. III, §2. În general condițiile „inițiale" sînt

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ a \leqslant x \leqslant b \end{matrix}\right\} \; v(x, 0),\ \sigma(x, 0),\ \varepsilon(x, 0) \text{ sînt toți dați} \qquad \text{(A1.2.6)}$$

iar condițiile la limită

$$\left.\begin{matrix} x = a \\ t \geqslant 0 \end{matrix}\right\} \text{ este dat } v(a, t) \text{ sau } \sigma(a, t)$$

$$\left.\begin{matrix} x = b \\ t \geqslant 0 \end{matrix}\right\} \text{ este dat } v(b, t) \text{ sau } \sigma(b, t) \qquad \text{(A1.2.7)}$$

Reamintim că dacă datele prescrise pentru $x = a$, $t = 0$ și $x = b$, $t = 0$ conform lui (A 1.2.6) și (A 1.2.7) nu coincid, trebuie să fie considerată și propagarea undelor de șoc. Acest aspect a fost discutat la Cap. III, §3. Fie că intervin unde de șoc, fie că nu, tot calculul se efectuează cu ajutorul calculatorului.

§3. Principiul metodei iterative

Deoarece este foarte dificil să se efectueze integrarea cu un calculator utilizînd o rețea neregulată de linii caracteristice și deoarece două din caracteristicile (A 1.2.4) au panta variabilă, a fost folosit un procedeu care utilizează o rețea regulată, dar în fiecare nod este necesară o metodă iterativă. Procedeul este următorul. În primul rînd trebuie să se determine care este valoarea minimă a pantei caracteristicelor în întregul domeniu din planul caracteristic ce este considerat. Aceasta se poate obține ușor din considerații privind ecuațiile constitutive și eventual condițiile inițiale și la limită. În cazul de față această pantă este chiar panta „elastică": $c = c_0$. Cu această pantă se construiește rețeaua regulată de linii caracteristice de pantă constantă (Fig. A 1.1). Această rețea este apoi utilizată pentru a găsi în fiecare nod panta liniilor caracteristice „adevărate" ce trec prin acel nod și soluția într-o primă iterație.

Scanned with OKEN Scanner

Din punct de vedere „fizic" prima iterație ce se obține în fiecare nod poate fi considerată a fi cea „elastică". Cu alte cuvinte rețeaua regulată de linii caracteristice (A 1.2.4)

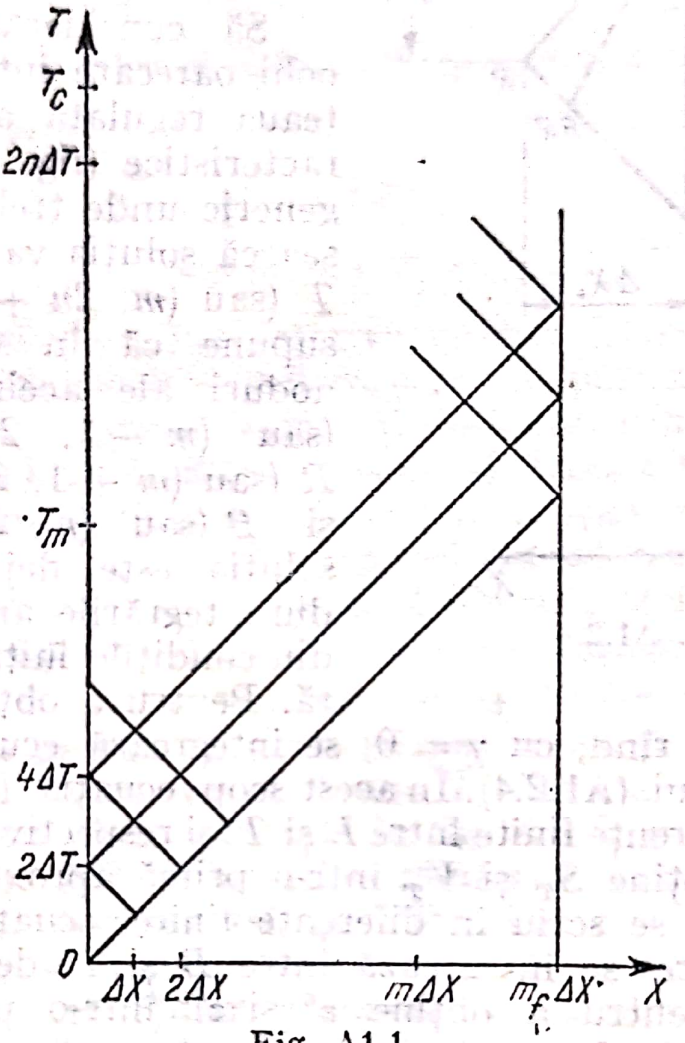


Fig. A1.1

se construiește pentru $c = c_0$ (vezi fig. A 1.2). Aceasta se obține punînd $\chi = 0$ (vezi (1.2.32)) sau $\chi = 0$ (vezi (3.1.1)) în toate ecuațiile. Prin urmare rețeaua este formată cu liniile echidistante

$$dX = \pm dT$$

cu intervalul $\Delta X = \Delta T$ ales convenabil pentru fiecare problemă în parte și care pentru anumite probleme poate fi eventual schimbat în cursul integrării.

Coordonatele nodurilor au fost stabilite în felul următor. Caracteristicele verticale succesive $dX = 0$ au fost notate prin $0\Delta X$, $1\Delta X$, $2\Delta X$, ..., $m\Delta X$, ..., $m_f\Delta X$ (cu $m_f\Delta x = l$)

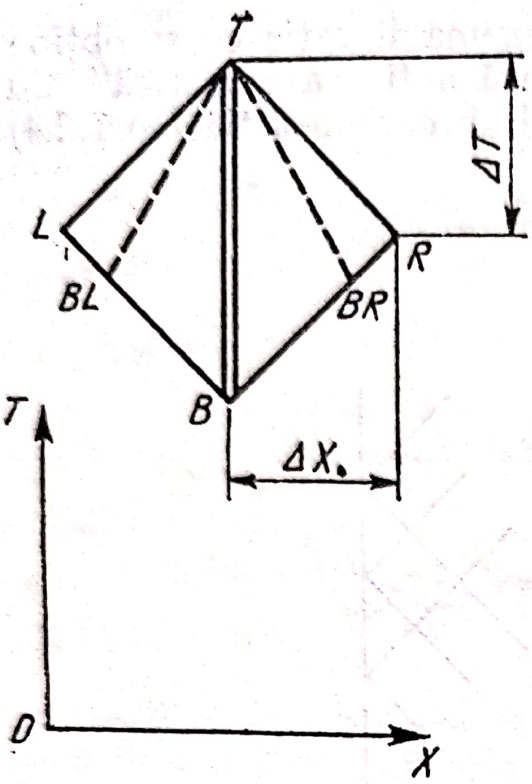


Fig. A1.2

iar caracteristicele de pantă pozitivă . $dX = dT$ au fost notate prin $0\Delta T$, $2\Delta T$, ..., $2n\Delta T$, ... (vezi fig. A1.1).

Să considerăm acum un ochi oarecare interior din rețeaua regulată a liniilor caracteristice (fig. A1.2) Un nod generic unde trebuie să se găsească soluția va fi notat prin T (sau $(m, 2n + m)$). Se presupune că în celelalte trei noduri ale aceluiași ochi L (sau $(m - 1, 2n + m - 1)$), R (sau $(m + 1, 2n + m - 1)$) și B (sau $(m, 2n + m - 2)$) soluția este deja cunoscută din integrările anterioare sau din condițile inițiale și la limită. Pentru a obține soluția în T în primul rînd, cu $\chi = 0$, se integrează ecuația $(A1.2.5)_1$ de-a lungul lui (A1.2.4). În acest scop ecuația $(A1.2.5)_1$, este scrisă în diferențe finite între L și T și respectiv între R și T. Astfel se obține S_T și V_T într-o primă aproximație („elastică"). Apoi se scriu în diferențe finite ecuațiile $(A1.2.5)_2$, $(A1.2.5)_3$ care se integrează între B și T, de-a lungul lui $(A1.2.4)_2$, pentru a obține ε^E și ε^P într-o primă aproximație. Înainte de a calcula pe ε^P este necesar să verificăm dacă $S_T > S_B$. Dacă această condiție nu este satisfăcută atunci $\varepsilon_T^P = \varepsilon_B^P$ în cazul RI cînd $\Psi = 0$, iar în cazul RD dacă $\Psi_B \neq 0$, $(A1.2.5)_2$ se scrie astfel

$$\varepsilon_T^P = \varepsilon_B^P + 2\Psi_B \Delta T.$$

Aceste condiții sînt impuse de cerința fizică ca totdeauna $\dot{\varepsilon}^P \geqslant 0$.

Reamintim acum inegalitățile ce intervin în definirea lui Ψ (vezi, Cap. I, §2):

$$\Psi(\sigma, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{k(\varepsilon)}{E} H(\sigma - f(\varepsilon)) & \text{dacă } \sigma > f(\varepsilon) \text{ și } \varepsilon \geqslant \varepsilon_Y \\ 0 & \text{dacă } \sigma \leqslant f(\varepsilon) \text{ sau } \varepsilon < \varepsilon_Y \end{cases} \quad (A1.3.1)$$

și cele ce intervin în definirea lui Φ: în cazul RI avem (vezi Cap. III, §1)

$$\chi = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \sigma = \sigma_m(X) \\ 0 \text{ dacă } \sigma \leqslant \sigma_Y \text{ sau } \sigma_Y \leqslant \sigma \leqslant \sigma_m(X) \end{cases} \quad \text{(A1.3.2)}$$

iar în cazul RD

$$\chi = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \sigma = \sigma_m(X) \\ 0 \text{ dacă } \sigma \leqslant f(\varepsilon) \text{ sau } \sigma < \sigma_m(X). \end{cases} \quad \text{(A1.3.3)}$$

Programul prevede acum testarea acestor inegalități. Pentru aceasta în memoria calculatorului este păstrată valoarea maximă a lui S pentru orice X, inclusiv valoarea S_B ce intervine în ochiul de rețea considerat. Dacă atît $\Phi = 0$ cît și $\Psi = 0$, atunci prima aproximare a soluției ce a fost obținută este chiar „soluția" în nodul considerat și în acest caz această soluție este imprimată. Dacă $\Psi \neq 0$ sau $\Phi \neq 0$ sau dacă $\Psi \neq 0$ și $\Phi \neq 0$, sînt necesare iterații suplimentare.

Dacă $\Phi \neq 0$ și $\Psi \neq 0$, atunci Φ și Ψ sînt calculați în T cu ajutorul primei aproximații pentru S și ε ce a fost deja obținută. Acum, pornind din T sînt trasate caracteristicele (A 1.2.4) (linii punctate în fig. A 1.2) pînă la intersecția în BL și BR cu laturile ochiului inițial. După obținerea coordonatelor lui BL și BR printr-o interpolare liniară între B și L și respectiv între B și R, sînt găsite valorile tuturor funcțiilor necunoscute în punctele BL și BR. Formulele de interpolare utilizate sînt de forma

$$S_{BL}^{(i)} = \frac{1}{\Delta T}\{(X_{BL}^{(i)} - (m-1)\,\Delta T)\,S_B + (m\Delta T - X_{BL}^{(i)})\,S_L\} \quad \text{(A1.3.4)}$$

unde indicele superior (i) marchează iterația de ordinul i, iar indicii inferiori indică punctul unde se efectuează calculul. Formule similare sînt utilizate pentru ε^E, ε^P, V, Φ și Ψ. Se procedează apoi în mod analog pentru punctul BR.

Se integrează apoi $(A\,1.2.5)_1$ de-a lungul lui BL-T și BR-T, adică de-a lungul caracteristicelor (A 1.2.4), pentru a găsi într-o aproximație mai bună pe $S_T^{(i+1)}$ și $V_T^{(i+1)}$. Apoi $\varepsilon_T^{P(i+1)}$ și $\varepsilon_T^{E(i+1)}$ sînt obținuți din $(A1.2.5)_{2,3}$ unde coeficienții Φ și Ψ sînt calculați pentru cea de a $i+1$ iterație a lui

ε_T^P astfel: $\frac{1}{2}(\Phi_B + \Phi_T^{(i)})$ și respectiv $\frac{1}{2}(\Psi_B + \Psi_T^{(i)})$. Urmează calculul lui Φ și Ψ pentru cea de a $i+1$ iterație, utilizînd formulele de definiție pentru acești coeficienți și valorile $S_T^{(i+1)}$ și $\varepsilon_T^{(i+1)}$ care au fost deja calculate.

Acest procedeu este continuat pînă la obținerea preciziei dorite. Această condiție referitoare la precizie, a fost scrisă în program sub forma

$$\left| \frac{S_T^{(i)}}{S_T^{(i+1)}} - 1 \right| < 10^{-a}$$

unde a este un întreg pozitiv (în general pentru calculele prezentate în Cap. III s-a luat $a = 4$). Practic, rare ori au fost necesare mai mult de 2 sau 3 iterații. După fiecare iterație au fost testate inegalitățile (A 1.3.1) și (A 1.3.2) sau (A 1.3.3)). Prin urmare la fiecare iterație se calculează panta liniilor caracteristice (A 1.2.4). Stabilitatea și convergența iterațiilor este asigurată căci totdeauna avem

$$\sqrt{\frac{f'_m}{\rho}} < \sqrt{\frac{f'(\varepsilon)}{\rho}} \leqslant \ldots \leqslant c^{(i)}(\sigma, \varepsilon) \leqslant c^{(i-1)}(\sigma, \varepsilon) \leqslant \ldots \leqslant c_0 \quad \text{(A1.3.5)}$$

unde σ și ε sînt calculate în punctul T al ochiului considerat, iar $f'_m = \min_{\varepsilon} f'(\varepsilon)$ este o constantă pentru fiecare problemă în parte și poate fi obținută din definiția lui f (se presupune că $f''(\varepsilon) < 0$) și din estimarea valorii maxime a lui ε în problema considerată.

Se arată ușor că inegalitățile (A1.3.5) sînt echivalente cu

$$\frac{1}{f'_m} - \frac{1}{E} > \frac{1}{f'(\varepsilon)} - \frac{1}{E} \geqslant \ldots \geqslant \Phi^{(i)}(\sigma, \varepsilon) \geqslant \Phi^{(i-1)}(\sigma, \varepsilon) \geqslant \ldots$$

$$\geqslant \ldots \geqslant \Phi^{(0)}(\sigma, \varepsilon) \geqslant 0. \quad \text{(A1.3.6)}$$

Inegalitățile extreme se obțin din restricția (1.2.31) impusă lui Φ. Celelalte inegalități se obțin pentru expresiile particulare considerate pentru Φ.

În cazul în care $\Phi = 0$ dar $\Psi \neq 0$ procedeul iterativ este mult simplificat. În acest caz punctele BL și L coincid ca și punctele BR și R (în (A 1.2.4) $c = c_0$). Iterațiile sînt totuși necesare pentru găsirea valorilor corecte pentru ε^P ce se obțin din (A1.2.5).

Scanned with OKEN Scanner

§4. Descrierea descărcării

Să considerăm în primul rînd cazul RD, adică cazul cînd termenul $\Psi(\sigma, \varepsilon)$ este prezent în (A 1.2.1). Trebuie să obţinem cu ajutorul programului numeric frontiera încărcare / descărcare. Este posibil ca atunci cînd se calculează iteraţiile succesive într-un punct, cînd este testată (A 1.3.1) se poate obţine într-o primă aproximaţie $\Psi \neq 0$ iar în cea de a doua $\Psi = 0$. În acest caz calculele se fac chiar pe frontiera dintre domeniul unde sistemul este cvasiliniar şi cel în care sistemul este liniar. Programul expus în paragraful precedent se înlocuieşte cu o altă subrutină numită program X. Deoarece iteraţiile succesive sînt situate fie deasupra fie dedesubtul curbei $\sigma = f(\varepsilon)$ (vezi (A 1.3.1)) cu ajutorul subrutinei X este ales drept soluţie un punct ce se află chiar pe curba $\sigma = f(\varepsilon)$. Pentru aceasta se utilizează o metodă numită metoda coardei. Algoritmul găsirii acestui punct este foarte rapid convergent.

În cazul RI cînd avem peste tot $\Psi(\sigma, \varepsilon) = 0$, subrutina X este diferită. Acum frontiera ce trebuie traversată de iteraţiile succesive este (1.1.3) iar inegalităţile ce se utilizează sînt (A 1.3.2)*. Prin urmare dacă unele dintre iteraţiile succesive se află deasupra curbei (1.1.3) iar celelalte dedesubt, se utilizează programul X. Totuşi datorită împrăştierii iteraţiilor succesive, ca o condiţie suplimentară utilizată pentru trecerea la programul X s-a folosit condiţia $S_T < S_B$. Programul X în acest caz este din nou un program de tipul metodei coardei sau este utilizată pur şi simplu o intersecţie directă dintre (1.1.3) şi dreapta ce trece prin două iteraţii succesive. Ambele tipuri de subrutine au fost utilizate.

§5. Condiţii la limită

Se reaminteşte că exemplele date în Cap. III se referă la ciocnirea simetrică a două bare. Condiţiile la limită considerate în acel capitol pentru epruveta iniţial în repaus sînt

---

*) Menţionăm că în cazul RI în procesul încărcării, iteraţiile succesive se află toate deasupra curbei (1.1.3) şi tind către un punct de pe această curbă.

Scanned with OKEN Scanner

formulate pentru cele două capete și deci necesită două subrutine. La capătul liber

$$\left.\begin{array}{l} x = l \\ t \geqslant 0 \end{array}\right\} \sigma(l, t) = 0 \qquad \text{(A1.5.1)}$$

iar subrutina respectivă este foarte simplă. Ne vom referi mai jos în detaliu la condițiile la limită de la capătul lovit.

Saltul lui v pentru $x = 0$ și $t = 0$ a fost considerat în program în două moduri. În primul rînd se poate considera propagarea unei unde de șoc, așa cum a fost descris în Cap. III, §3. În al doilea rînd se poate presupune că v crește foarte rapid dar lin, de la zero la v_{max}. În acest ultim caz la $x = 0$ au fost considerate trei intervale de timp pentru care trei tipuri de subrutine au fost pregătite

$$x = 0 \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant t_m\text{: se prescrie } v(0, t) \text{ iar } 0 \leqslant v(0, t) \leqslant v_{max} \\ t_m \leqslant t \leqslant T_c\text{: } v_H = v_S \\ T_c \leqslant t\text{: } \qquad \sigma = 0. \end{cases} \qquad \text{(A1.5.2)}$$

Aici v_H este viteza proiectilului, v_S viteza epruvetei iar T_c este așa numitul „timp de contact" și este obținut din calcul.

Pentru explicarea diverselor situații ce intervin în legătură cu aplicarea condițiilor (A1.5.2) să discutăm în primul rînd cazul RD.

Vom considera o jumătate din ochiul de caracteristici din fig. A1.2, așa cum este necesar pentru frontiera $x = 0$ (vezi liniile pline din fig. A 1.3). În cazul aplicării condiției $(A1.5.2)_1$ este prescrisă o variație lină a lui v de la zero la v_{max}. Deci în T valoarea lui v este totdeauna cunoscută din condițiile la limită. Apoi utilizînd $(A1.2.5)_1$ se poate obține $S_T^{(0)}$ printr-o integrare de la R la T. Integrînd $(A1.2.5)_2$ între B și T se obține în continuare $\varepsilon_T^{P(0)}$ și $\varepsilon_T^{E(0)}$. Apoi procedeul urmează îndeaproape programul deja descris la §3 de mai sus.

Să explicăm acum condiția $(A\,1.5.2)_2$. Ea rezultă din aspectul fizic al problemei considerate: lovirea longitudinală a două bare identice. Să presupunem că bara din stînga, ce va fi numită proiectil (vezi și Cap. II, §2) se mișcă

Scanned with OKEN Scanner

către dreapta cu viteza inițială $v_{max}/2$, iar bara din dreapta (numită epruvetă) se mișcă către stînga cu viteza inițială $-v_{max}/2$. În acest mod în timpul impactului, la capetele lovite $X = 0$, totul este simetric, în B și T valorile tuturor necunoscutelor sînt egale de ambele părți ale interfeței $X = 0$. În afară de aceasta, datorită simetriei se presupune că $S_R = S_L$, $\varepsilon_R = \varepsilon_L$ etc., și $V_R = -V_L$, deoarece $V_B = V_T = 0$. Dar în problema considerată condițiile inițiale sînt de fapt diferite, adică epruveta este în repaus iar proiectilul se mișcă către dreapta cu viteza v_{max}, în afară de

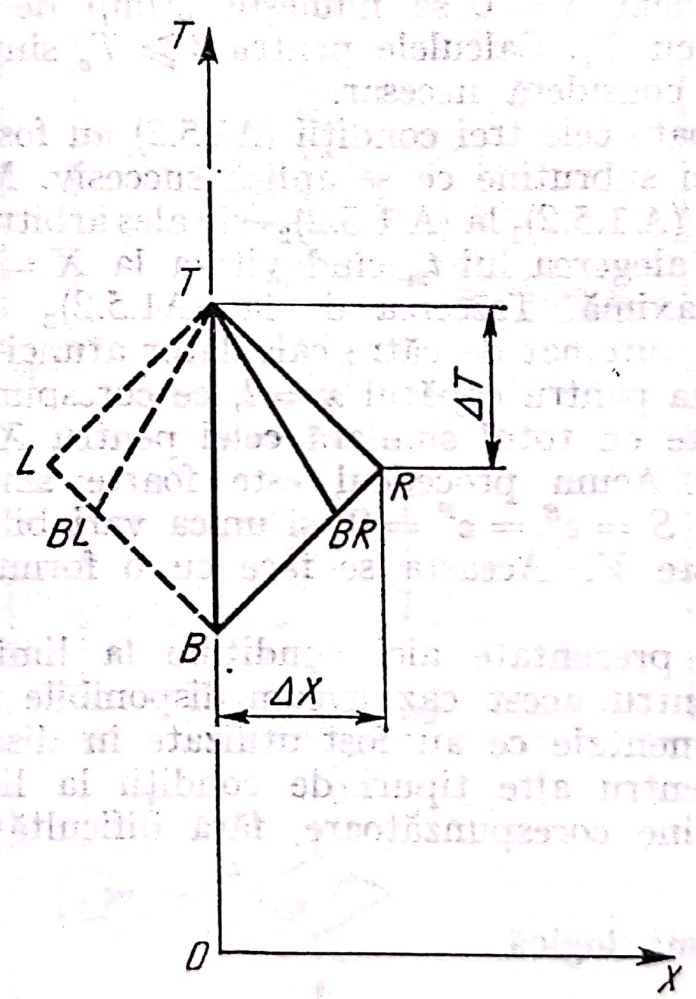


Fig. A1.3

condițiile de simetrie presupuse pentru S, ε, etc., pentru viteze se utilizează condiția

$$(\Delta V)_R = (-\Delta V)_L \text{ adică } V_L = 2V_B - V_R. \quad \text{(A 1.5.3)}$$

Astfel jumătatea de ochi de rețea din fig. A1.3 este completată cu simetrica ei (linii punctate). Valorile în L ale tuturor

necunoscutelor se obțin din cele din R prin simetria descrisă mai sus. În continuare subrutina urmează îndeaproape programul principal de la §3.

Această subrutină este utilizată atît timp cît din calcul rezultă $S > 0$. Dacă la un anumit moment $S_B \leqslant 0$, din motive fizice se pune $S_B = 0$ și subrutina la $X = 0$ este din nou schimbată: $S_T = 0$, $\varepsilon_T^P = \varepsilon_B^P$, iar V se obține din (A1.2.5), care pentru acest caz cînd $\Psi = 0$ și $c = c_0$ se reduce la $V_T = V_R - S_R$. Cînd $S = 0$ avem $\Phi = \Psi = 0$ și nu mai sînt necesare iterațiile. Momentul cînd pentru prima oară la $X = 0$ obținem $S = 0$ se numește „timp de contact" și este notat cu T_c. Calculele pentru $t \geqslant T_c$ sînt continuate atît cît se consideră necesar.

Astfel toate cele trei condiții (A1.5.2) au fost scrise sub forma a trei subrutine ce se aplică succesiv. Momentul de trecere de la $(A\,1.5.2)_1$ la $(A\,1.5.2)_2$ este ales arbitrar și depinde de fapt de alegerea lui t_m cînd viteza la $X = 0$ își atinge valoarea maximă. Trecerea de la $(A1.5.2)_2$ la $(A1.5.2)_3$ se face însă automat de către calculator atunci cînd $S = 0$.

Subrutina pentru capătul $x = l$, ce corespunde condiției $(A\,1.5.1)$ este cu totul similară celei pentru $X = 0$ atunci cînd $S = 0$. Acum procedeul este foarte simplu căci la $x = l$ avem $S = \varepsilon^E = \varepsilon^P = 0$, și unica variabilă ce trebuie calculată este V. Aceasta se face cu o formulă de tipul $(A\,1.2.5)_1$.

Au fost prezentate aici condițiile la limită (A1.5.2) deoarece pentru acest caz aveam disponibile foarte multe date experimentale ce au fost utilizate în discuțiile de la Cap. III. Pentru alte tipuri de condiții la limită se pot scrie subrutine corespunzătoare, fără dificultăți deosebite.

§6. Schema logică

O schemă logică simplificată este dată în fig. A1.4. Deși schema logică nu cere explicații deosebite, vor fi date totuși cîteva lămuriri.

Calculele sînt pornite din punctul $n = 1$, $m = 0$. Subrutina utilizată în legătură cu condițiile la limită $(A1.5.2)_1$, deci în primul stagiu al procesului de încărcare, a fost notată cu II.

Scanned with OKEN Scanner

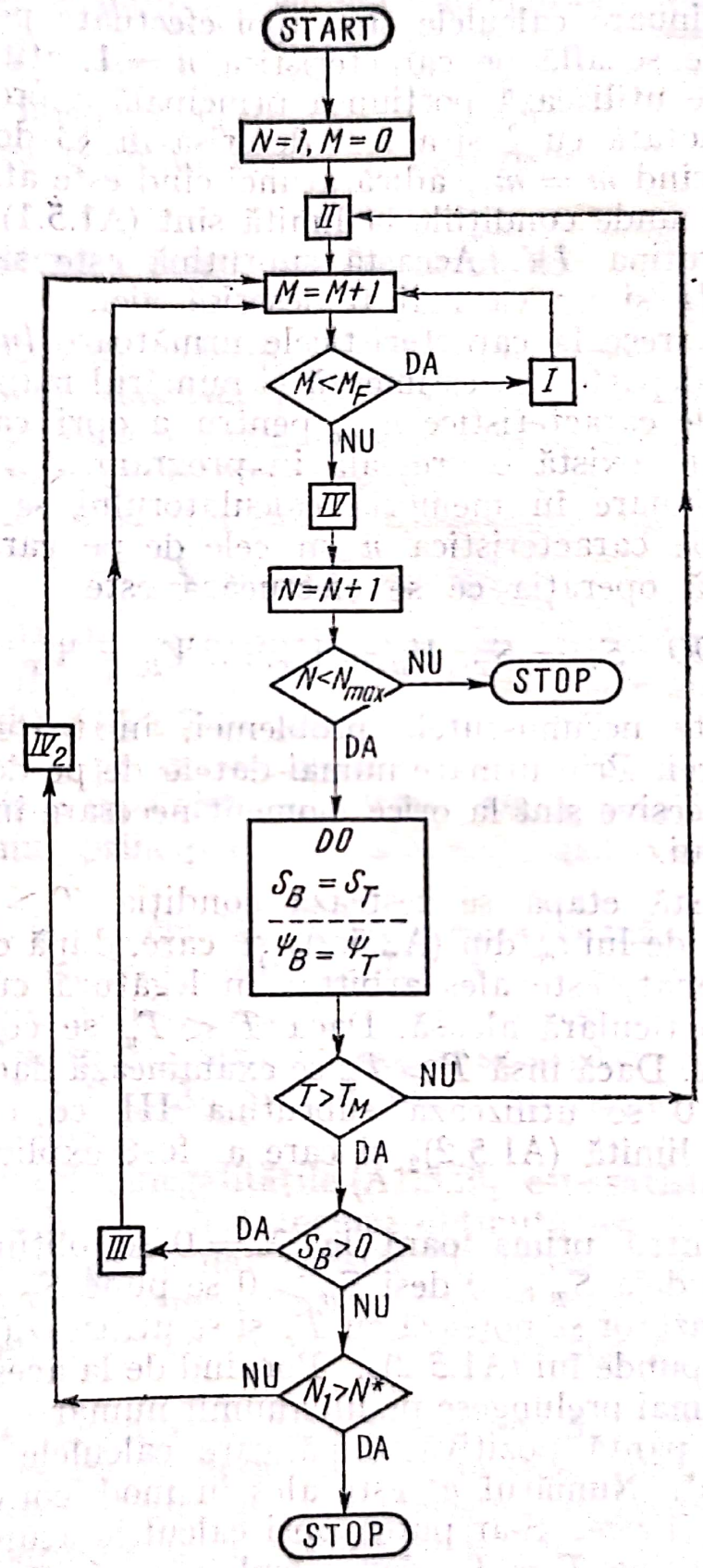


Fig. A1.4

Scanned with OKEN Scanner

În continuare calculele sînt apoi efectuate pe nodurile succesive ce se află pe caracteristica $n = 1$, atît timp cît $m < m_F$. Se utilizează porțiunea principală a programului, ce a fost notată cu I și a fost descrisă în §3 de mai sus.

Atunci cînd $m = m_F$, adică atunci cînd este atinsă frontiera $x = l$, unde condițiile la limită sînt $(A1.5.1)_1$ se utilizează subrutina IV. Această subrutină este similară cu subrutina II și nu va mai fi descrisă aici.

Apoi se trece la caracteristicele următoare $(n = n + 1)$ și așa mai departe. Se estimează și numărul maxim posibil pentru liniile caracteristice n_{max} pentru a opri calculele în cazul în care există o greșeală în program.

În continuare în memoria calculatorului se înlocuiesc datele de pe caracteristica n cu cele de pe caracteristica $n + 1$, adică operația ce se efectuează este

$$DO \quad S_B = S_T,\ V_B = V_T, \ldots, \Psi_B = \Psi_T$$

pentru toate necunoscutele problemei, în toate nodurile caracteristicei. Prin urmare numai datele de pe două caracteristici succesive sînt la orice moment necesare în memoria calculatorului.

La această etapă se testează condiția $T > T_m$, unde T_m corespunde lui t_m din $(A2.5.2)_2$ și care, după cum a fost deja menționat, este ales arbitrar în legătură cu condiția la limită particulară aleasă. Dacă $T < T_m$ se continuă cu subrutina II. Dacă însă $T > T_m$ se examinează dacă $S_B > 0$. Dacă $S_B > 0$ se utilizează subrutina III ce corespunde condiției la limită $(A1.5.2)_2$ și care a fost explicată la §5 de mai sus.

Cînd pentru prima oară la $X = 0$ se obține $S_T = 0$ (dacă avem deja $S_T < 0$ deși $S_B > 0$ se pune $S_T = 0$), timpul corespunzător se notează cu T_c și se utilizează subrutina IV ce corespunde lui $(A1.5.2)_3$. Pornind de la acest moment calculele se mai prelungesc pe un anumit număr n_1 de caracteristici de pantă pozitivă, după care calculele se opresc cînd $n_1 > n^*$. Numărul n^* este ales în mod convenabil pe considerente fizice. S-ar putea opri calculele atunci cînd la $X = 0$ se obține $T = T_c$, dar calculele au fost totuși continuate pentru a se obține variația diverselor funcții pentru $T > T_c$.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimea ochiului rețelei de caracteristici a fost de obicei aleasă $\Delta X = 5 \times 10^{-4}$. În cazurile în care prin condițiile la limită (A1.5.2) se prescrie o variație foarte rapidă pentru $V(0, t)$, în imediata vecinătate a punctului $X = 0$, $T = 0$ dimensiunea ochiului rețelei a fost redusă la $\Delta X = 10^{-5}$.

§7. Observații referitoare la cazul RI

În abordarea cazului RI (deci cînd peste tot $\Psi = 0$) a fost posibil, datorită particularităților problemei considerate, să se facă o economie a timpului de calcul. Aceasta se obține prin exprimarea soluției în domeniul din planul caracteristic ce se află sub dreapta (vezi Cap. III, §3)

$$X = -(T - 2m_F \Delta T) \qquad \text{(A1.7.1)}$$

prin formule simple explicite. Cu alte cuvinte pentru orice condiții la limită prescrise la $X = 0$, se poate obține soluția de-a lungul lui (A 1.7.1). Aceste date se utilizează apoi drept „date inițiale" pentru calculele numerice efectuate deasupra acestei linii (vezi Cristescu [1970]). Unele detalii referitoare la algoritmul principal și la schema logică vor fi date mai jos.

Subrutina principală este într-o oarecare măsură apropiată de cea descrisă în legătură cu fig. A1.2. Se calculează întîi prima aproximație „elastică". Apoi se testează inegalitățile (A1.3.2). Pentru aceasta este necesar să se păstreze în memoria calculatorului $S_{max}(X)$ pentru toate secțiunile transversale $m\Delta X$ considerate.

Dacă una din inegalitățile $(A1.3.2)_2$ este satisfăcută atunci prima iterație ce a fost tocmai obținută este soluția finală pentru nodul particular considerat. Dacă totuși este satisfăcută $(A1.3.2)_1$ atunci sînt necesare iterații succesive care sînt de același tip cu cele descrise mai sus în legătură cu fig. A1.2.

Schema logică este dată în fig. A1.5. Acum calculele sînt pornite de la nodul $n = 0$, $m = m_F$ (vezi fig. A1.1) Calculele sînt făcute pe caracteristici succesive de pantă pozitivă pornind de la nodul ce se află pe linia dreaptă (A1.7.1). În schema logică V este subrutina prin care se obține soluția de-a lungul dreptei (A1.7.1) cu ajutorul unor

Scanned with OKEN Scanner

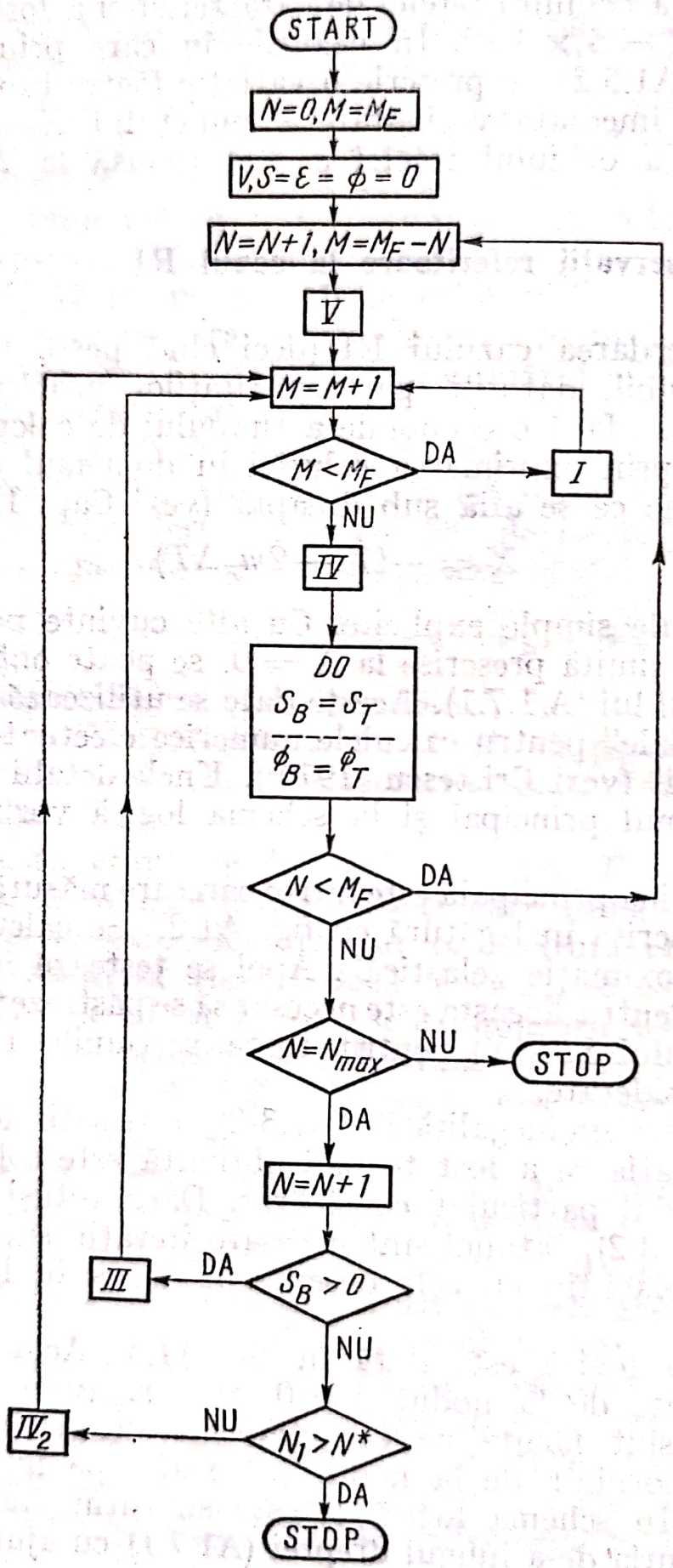


Fig. A1.5

Scanned with OKEN Scanner

formule elementare. Subrutina IV este utilizată pentru condițiile la limită (A1.5.1) iar subrutina IV_2 este utilizată în legătură cu condițiile la limită $(A1.5.2)_3$. Alte detalii ale schemei logice rezultă foarte simplu direct din schemă.

§8. Alte variante ale metodei caracteristicilor

Mai sus a fost expusă varianta metodei caracteristicilor ce a fost utilizată pentru obținerea exemplelor prezentate în Cap. III. Există desigur și alte variante posibile. Dintre acestea numai acele variante ce utilizează o repartiție regulată a nodurilor au o importanță practică, atunci cînd calculele se efectuează cu un calculator. Reamintim de asemenea că trecerea de la încărcare la descărcare și vice-versa sînt aspectele cele mai dificile în organizarea unui program, dacă modelul utilizat este elasto-vîscoplastic.

O altă variantă cu putință este cea numită uneori „tehnica timpului constant". Se trasează în planul caracteristic drepte paralele $T = \text{const.}$ la distanțe egale ΔT unele de altele. ΔT se alege în mod convenabil. Un ochi tipic de rețea este reprezentat în fig. A1.6. Alegerea poziției punc-

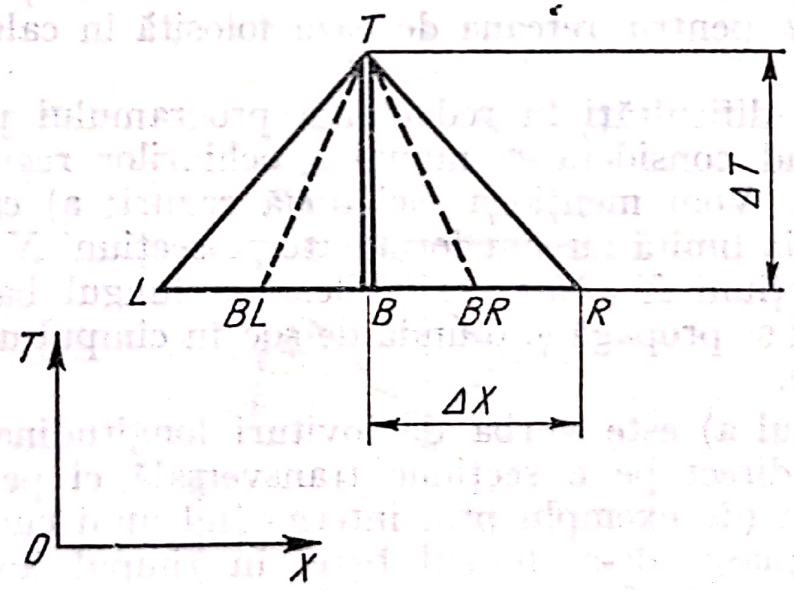


Fig. A1.6

telor L și R poate fi făcută în mai multe moduri, dar ea trebuie să fie făcută astfel încît condiția de stabilitate discutată în §3 să fie satisfăcută. Ținînd seama și de problema trecerii de la încărcare la descărcare, este util să se constru-

Scanned with OKEN Scanner

iască ochiul de rețea din fig. A 1.6 cu $\Delta X = \Delta T$. În acest caz procedeul iterativ descris în §3 de mai sus se poate adopta și pentru un asemenea ochi de rețea. Deci în princi-

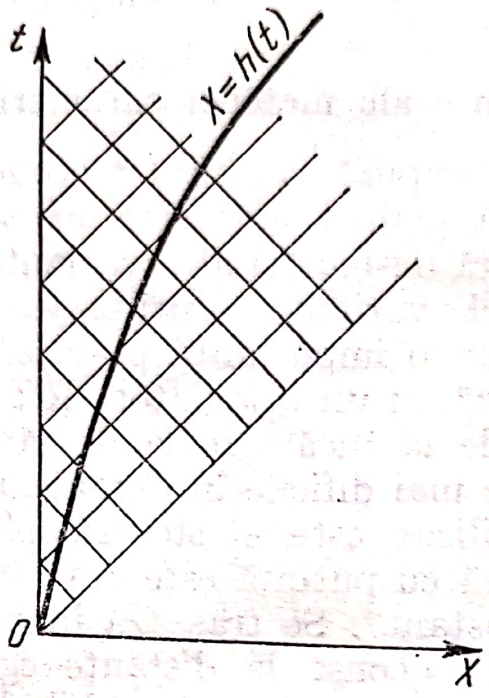


Fig. A1.7

piu această variantă utilizează de asemenea dreptele $dx = \pm c_0\, dt$ pentru rețeaua de bază folosită în calculele numerice.

Unele dificultăți în redactarea programului pot apare atunci cînd considerarea numai a ochiurilor regulate este imposibilă. Vom menționa aici două cazuri: a) cazul cînd condițiile la limită nu sînt formulate pe secțiuni $X = \text{const.}$, ci pe secțiuni $X = h(t)$ variabile de-a lungul barei și b) cazul cînd se propagă și o undă de șoc în cîmpul undelor de accelerație.

În cazul a) este vorba de lovituri longitudinale ce nu se aplică direct pe o secțiune transversală ci pe o frontieră mobilă (de exemplu prin intermediul unui cursor ce se poate deplasa de-a lungul barei în timpul lovirii). Fie $X = h(t)$ (fig. A1.7) ecuația de mișcare a frontierei mobile. Uneori ea este cunoscută a priori, alteori ecuația acestei curbe se poate determina din aproape în aproape în timpul găsirii soluției prin metode numerice. Această frontieră poate fi definită de o manieră destul de generală. Ea trebuie totuși să satisfacă condiția de a fi o curbă „asemenea tim-

pului". Se reamintește că o curbă $X = h(t)$ se numește asemenea timpului, dacă pentru orice punct P de pe curbă, trasînd toate caracteristicele ce trec prin acest punct pentru $\Delta t > 0$, unele dintre aceste caracteristici se află de o parte a curbei iar celelalte de cealaltă parte (fig. A 1.8). Vom mai observa că dacă $c_m = \min\limits_{\sigma,\ \varepsilon} c(\sigma, \varepsilon)$ atunci trebuie să fie satisfăcută condiția $h' < c_m$, adică frontiera mobilă trebuie să fie „subsonică". Prescrierea condițiilor la limită pe o curbă asemenea timpului oarecare se face cu totul analog ca mai sus (vezi (A1.2.7)): pe

$$X = h(t) \text{ este dat } v(h(t), t) \text{ sau } \sigma(h(t), t). \quad \text{(A1.8.1)}$$

Ambele situații sînt probleme fizic posibile.

Soluția în toate nodurile interioare se poate obține urmînd procedeul indicat mai sus. Să considerăm deci un ochi de caracteristică construit cu caracteristicile $dX = \pm c_0 dt$, in-

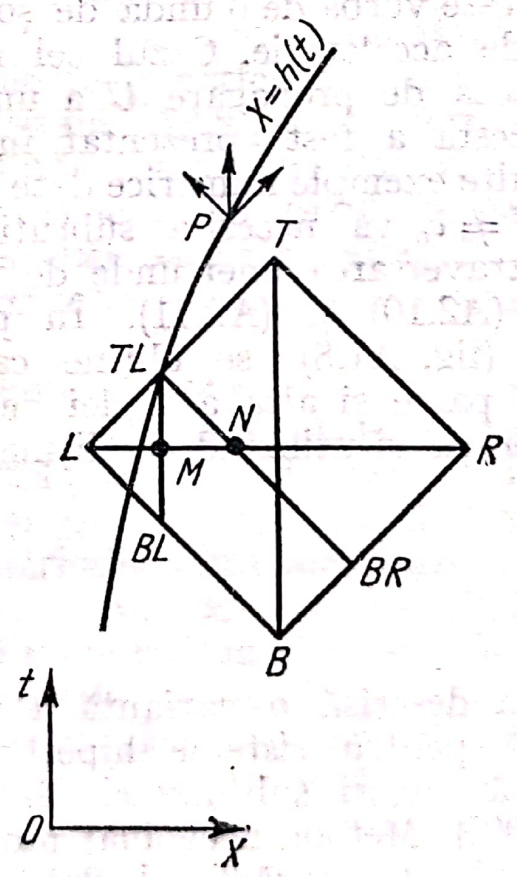


Fig. A1.8

tersectat de frontiera $X = h(t)$ (fig. A1.8; alte situații posibile pot fi considerate cu procedee similare). Coordonatele nodului TL se pot obține ușor și apoi nodurile BR și BL

Scanned with OKEN Scanner

trasînd caracteristicile $dX = -c_0\, dt$ și $dX = 0$ ce trec prin TL. Să presupunem că soluția în nodurile B și R este cunoscută din integrări anterioare sau din condiții inițiale. Soluția în BR și BL se poate obține prin interpolare sau extrapolare pornind de la nodurile vecine în care soluția a fost deja obținută. Apoi utilizînd (A1.8.1) se pot integra ecuațiile (A1.2.5) pe caracteristicile BR-TL și BL-TL pentru a obține într-o primă aproximație soluția în TL. Pentru aproximațiile următoare se procedează similar ca mai sus. Soluția în TL se poate desigur obține și cu o altă variantă ce utilizează nodurile M și N, unde soluția trebuie obținută în prealabil prin extrapolare. După aflarea soluției în TL se poate trece la aflarea ei în T; procedeul utilizează nodul TL în locul lui L și desigur nodurile B și R, și urmează o schemă apropiată de cea descrisă în §3.

Cazul b) menționat mai sus se consideră oarecum similar. În acest caz este vorba de o undă de șoc ce traversează cîmpul undelor de accelerație. Cazul cel mai simplu este acela în care viteza de propagare U a undei de șoc este $U = c_0$. Cazul acesta a fost prezentat în Cap. III, §3 și utilizat în mai multe exemple numerice date (vezi și Cristescu [1970]). Cazul $U \neq c_0$ va necesita subrutine suplimentare în program. La traversarea unei unde de șoc se utilizează relațiile de salt (A2.10) și (A2.11). În principiu soluția într-un nod TL (fig. A1.8) se obține calculînd valorile variabilelor de o parte și alta a undei de șoc din cîmpul undelor de accelerație și utilizînd condițiile de salt (A2.10) și (A2.11).

§9. Observații

Mai sus a fost descrisă o variantă a metodei caracteristicilor utilizată pentru sisteme hiperbolice cvasiliniare, metodă cunoscută uneori sub numele de metoda Massau (vezi Massau [1899]). Metoda a evoluat mult în legătură cu adaptarea ei în vederea utilizării calculatoarelor electronice. Cititorul interesat poate găsi informații suplimentare în diverse cărți (vezi de exemplu: Cristescu [1967], Jeffrey și Taniuti [1964], Courant și Friedrichs [1948], Berezin și Jidkov [1960] vol. II, Forsythe și Wasow [1960] etc.).

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 2

Elemente de teoria propagării undelor unidimensionale

Uneori este posibil și util să se descrie mișcarea unui corp material $\mathcal{B}$ cu ajutorul unei singure coordonate spațiale. În această anexă sînt prezentate unele rezultate generale aplicabile unor astfel de situații.

Ecuațiile integrale $(A2.5)_{1,2}$ sau forma lor diferențială $(A2.6)_{1,2}$ reprezintă ecuațiile generale de conservare pentru mișcarea unidimensională în cazul în care sînt prezente efecte termo-mecanice cuplate. Inegalitatea $(A2.5)_3$ sau $(A2.6)_3$ este o expresie matematică a celei de a doua legi a termodinamicii.

În cursul mișcării corpului pot apare anumite discontinuități. Cauzele acestor discontinuități pot fi condițiile inițiale și la limită; forma ecuațiilor constitutive etc. Formulele (A 2.10) și (A 2.11) reprezintă condițiile ce trebuie să le satisfacă mărimile termomecanice la traversarea unei unde de șoc, în timp ce relațiile (A2.12), (A2.14) și (A2.15) sînt condiții ce trebuie să fie satisfăcute la traversarea undelor de accelerație. La amîndouă grupele de condiții trebuie adăugate ecuațiile constitutive ale corpului considerat.

1. Vom numi configurație unidimensională de referință $\mathcal{R}$ a unui corp $\mathcal{B}$ un interval finit sau infinit de pe dreapta reală. O mișcare unidimensională a corpului $\mathcal{B}$ va fi o aplicație $\chi: \mathcal{R} \times I \to \mathcal{R}$, unde I este un interval de pe dreapta reală, adică

$$x = \chi(X, t), \quad X \in \mathcal{R}, \quad t \in I \subset R \qquad (A2.1)$$

cu proprietatea că pentru orice $t \in I$, t fixat, $\chi(X, t)$ este injectivă și bicontinuă în raport cu X. Vom presupune adesea că χ este de clasă C^2 în raport cu variabilele (X, t). X se numește coordonata inițială (sau Lagrangeană) și x coordonata actuală (sau Euleriană) iar t este timpul. În cazul cînd χ este de clasă C^1 putem introduce următoarele funcții

$$v = \dot{x} = \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{A2.2}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \chi}{\partial X} - 1 \tag{A2.3}$$

numite respectiv viteza și deformația particulei. Următoarele cantități

$$\sigma, b, e, \theta, \eta, \psi = e - \eta\theta, \quad q, g = \frac{\partial \theta}{\partial X}, r \tag{A2.4}$$

sînt mărimi uzuale în termodinamica corpului continuu (vezi de ex. Coleman și Gurtin [1965], III, Truesdell [1969] și de asemenea Cap. V) și ele au în contextul acestei lucrări următoarele semnificații:

σ — este numită tensiune și este forța pe unitatea de arie din configurația de referință; este orientată spre normala exterioară;

θ — este temperatura absolută și este totdeauna pozitivă,

e — este energia internă pe unitatea de volum în configurația de referință;

η — este entropia pe unitatea de volum în configurația de referință,

ψ — este energia liberă pe unitatea de volum în configurația de referință,

q — este fluxul de căldură prin unitatea de arie în configurația de referință și este orientat spre normala interioară,

g — se numește gradientul temperaturii în configurația de referință,

b — se numește forța masică,

r — este surplusul de căldură primit din exterior.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile de conservare a impulsului, energiei și inegalitatea lui Clausius-Duhem se pot scrie (vezi de ex. Coleman și Gurtin [1965], *III*) sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{X_1}^{X_2}\dot{x}\,\rho_0\,\mathrm{d}X=\int_{X_1}^{X_2}b\,\rho_0\,\mathrm{d}X+\sigma(X_2,t)-\sigma(X_1,t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{X_1}^{X_2}\rho_0\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+e\right)\mathrm{d}X=\int_{X_1}^{X_2}(\dot{x}b+r)\,\rho_0\,\mathrm{d}X+\sigma(X_2,t)\,\dot{x}(X_2,t)-$$

$$-\sigma(X_1,t)\,\dot{x}(X_1,t)-q(X_2,t)+q(X_1,t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{X_1}^{X_2}\eta\,\mathrm{d}X\geqslant\int_{X_1}^{X_2}\frac{r}{\theta}\rho_0\mathrm{d}X+\frac{q(X_1,t)}{\theta(X_1,t)}-\frac{q(X_2,t)}{\theta(X_2,t)}. \qquad \text{(A2.5)}$$

În cazul cînd toate funcțiile din (A2.5) sînt suficient de netede, aceste ecuații pot fi scrise sub formă diferențială astfel

$$\rho_0\ddot{x}-\rho_0 b=\frac{\partial\sigma}{\partial X},$$

$$\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+e\right)=\rho_0(\dot{x}b+r)+\frac{\partial}{\partial X}(\sigma\dot{x})-\frac{\partial q}{\partial X} \qquad \text{(A2.6)}$$

$$\rho_0\dot{\eta}\geqslant\frac{r}{\theta}-\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{q}{\theta}\right)$$

unde ρ_0 este densitatea în configurația de referință.

2. Vom numi undă prin corpul $\mathcal{B}$ o curbă netedă din planul (X, t)

$$\mathscr{C}=(Y(t),t),\quad U(t)=\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{Y}(t),\quad t\in I \qquad \text{(A2.7)}$$

care are proprietatea că la traversarea ei unele dintre mărimile v, ε, σ, e, η, ψ, θ, q, g sau dintre derivatele lor au discontinuități de prima speță (o funcție $f(X, t)$ se spune că are discontinuități de prima speță în punctul (X, t) dacă pentru t fixat, $\lim\limits_{\substack{Y\to X\\Y<X}} f(Y,t)$ și $\lim\limits_{\substack{Y\to X\\Y>X}} f(Y,t)$ există și sînt finite), fiind continue în raport cu (X, t) în afara lui $\mathscr{C}$.

O curbă netedă $\mathscr{C}$ va fi numită undă de șoc dacă mișcarea $\chi(X, t)$ este continuă la traversarea ei dar cel puțin

Scanned with OKEN Scanner

unele dintre mărimile v, ε, σ, e, η, ψ, θ q, g au salturi, fiind în afară lui $\mathscr{C}$ funcţii netede de (X, t). Adică, dacă notăm cu $f(X, t)$ una dintre mărimile de mai sus, atunci există limitele

$$f^-(t) = \lim_{\substack{X \to Y(t) \\ X < Y(t)}} f(X, t), \quad f^+(t) = \lim_{\substack{X \to Y(t) \\ X > Y(t)}} f(X, t) \tag{A2.8}$$

şi cel puţin pentru una dintre ele

$$[f](t) = f^+(t) - f^-(t) \neq 0. \tag{A2.9}$$

Dacă aplicăm legile de conservare (A 2.5) în cazul unui corp $\mathscr{B}$ prin care se propagă o undă de şoc $\mathscr{C}$, în ipoteza că b şi r sînt continui la traversarea lui $\mathscr{C}$ ajungem la concluzia că între salturi trebuie să existe relaţiile (vezi de ex. Chen şi Gurtin [1972])

$$\begin{aligned} &\rho_0 U[v] + [\sigma] = 0 \\ &\rho_0 U\left[\frac{v^2}{2} + e\right] + [\sigma v] - [q] = 0 \\ &U[\eta] \geqslant -\left[\frac{q}{\theta}\right] \end{aligned} \tag{A2.10}$$

iar datorită lui (A2.2) şi (A 2.3)

$$U[\varepsilon] + [v] = 0 \tag{A2.11}$$

Relaţiile (A 2.10) se numesc relaţii dinamice de compatibilitate iar relaţia (A 2.11) se numeşte relaţie cinematică de compatibilitate.

Relaţiile (A2.10) se deduc direct din (A2.5). Vom arăta de exemplu cum se poate stabili $(A2.10)_1$. Fie X_1 şi X_2 astfel ca $X_1 < Y(t) < X_2$. Atunci $(A2.5)_1$ se poate scrie

$$\frac{d}{dt}\int_{X_1}^{Y(t)} \rho_0 v(X, t)\, dX + \frac{d}{dt}\int_{Y(t)}^{X_2} \rho_0 v(X, t)\, dX = \int_{X_1}^{X_2} \rho_0 b(X, t)\, dX + \sigma(X_2, t) - \sigma(X_1, t).$$

De aici obţinem, prin aplicarea formulei cunoscute de derivare a unei integrale depinzînd de un parametru şi ţinînd

seama de notațiile (A2.8)

$$\rho_0 v^-(Y(t), t)\,\dot{Y}(t) - \rho_0 v^+(Y(t), t)\,\dot{Y}(t) + \int_{X_1}^{Y(t)} \rho_0 \frac{\partial v(X, t)}{\partial t}\,dX +$$

$$+ \int_{Y(t)}^{X_2} \rho_0 \frac{\partial v(X, t)}{\partial t}\,dX = \int_{X_1}^{X_2} \rho_0 b(X, t)\,dX + \sigma(X_2, t) - \sigma(X_1, t).$$

Acum luînd $X_1 \to Y(t)$ și $X_2 \to Y(t)$ și ținînd seama de $(A2.7)_2$ și (A2.9) se obține

$$-\rho_0 U[v] = [\sigma].$$

3. O curbă netedă $\mathscr{C}$ de ecuație $Y = \varphi(t)$ va fi numită undă de accelerație dacă la traversarea ei mișcarea $\chi(X, t)$ este de clasă C^1 iar viteza $v(X, t)$ și deformația $\varepsilon(X, t)$, precum și mărimile θ, σ, ψ, η și q sînt funcții continue dar derivatele lor pot avea discontinuități de salt la traversarea lui $\mathscr{C}$, rămînînd continue în afara curbei $\mathscr{C}$.

Continuitatea funcțiilor v și ε conduce la așa numitele condiții cinematice de compatibilitate ce trebuie să fie satisfăcute la traversarea curbei $\mathscr{C}$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right] + c\left[\frac{\partial v}{\partial X}\right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] + c\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial X}\right] = 0 \qquad \text{(A2.12)}$$

unde c este panta curbei $\mathscr{C}$ în punctul $(\varphi(t), t)$

$$c = \frac{d\varphi(t)}{dt} \qquad \text{(A2.13)}$$

iar prin paranteza dreaptă ca și mai înainte (vezi (A2.9)) s-a notat saltul cantității respective la traversarea curbei $\mathscr{C}$. Faptul că v și ε sînt derivatele parțiale ale funcției χ, conduce la condiția de compatibilitate

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial v}{\partial X}\right]. \qquad \text{(A2.14)}$$

Condițiile dinamice de compatibilitate se obțin din (A2.6) cum urmează: se scriu aceste ecuații de o parte și de

Scanned with OKEN Scanner

alta a curbei $\mathscr{C}$, se trece apoi la limită la un punct de pe curba $\mathscr{C}$ și se face diferența între cele două limite. Se obține astfel

$$\rho_0\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]=\left[\frac{\partial \sigma}{\partial X}\right],$$

$$\rho_0 v\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]+\rho_0\left[\frac{\partial e}{\partial t}\right]=v\left[\frac{\partial \sigma}{\partial X}\right]+\sigma\left[\frac{\partial v}{\partial X}\right]-\left[\frac{\partial q}{\partial X}\right], \quad \text{(A2.15)}$$

$$\rho_0\left[\frac{\partial \eta}{\partial t}\right]+\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{q}{\theta}\right]\geqslant 0,$$

în ipoteza suplimentară că b și r sînt funcții continue la traversarea curbei.

Condițiile de salt (A2.12), (A2.14) și $(A2.15)_{1,2}$ formează un sistem de ecuații algebrice liniare și omogene în necunoscutele $\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right], \left[\frac{\partial v}{\partial X}\right]$ etc. Sistemul obținut este subdeterminat și este independent de ecuațiile constitutive ale corpului. Pentru a discuta condițiile de existență a undelor de accelerație relațiile de mai sus trebuie suplimentate cu ecuațiile constitutive, adică cu niște relații între cantitățile ε, θ, σ, e, η și q. În cazul fluidelor perfecte o tratare sistematică a acestei probleme poate fi găsită în cartea lui Hadamard [1903] și de asemenea în Courant și Friedrichs [1948]. Pentru corpurile elasto-plastice tratarea acestei probleme poate fi găsită în cărțile lui Rahmatulin și Demianov [1961] și Cristescu [1967]. Pentru dezvoltările mai recente vezi literatura de la Cap. VII.

Între caracteristici și undele de accelerație există o strînsă legătură și anume undele de accelerație formează o submulțime a familiei caracteristicilor (vezi de exemplu Courant și Friedrichs [1948]). Pentru structura mulțimii undelor de accelerație în cadrul mulțimii caracteristicilor vezi Suliciu [1973].

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 3

Ecuațiile generale de conservare și elemente de teoria propagărilor de unde

1. O configurație de referință a unui corp $\mathcal{B}$ va fi un domeniu $\mathcal{R}$ din R^3 cu proprietatea că între punctele lui $\mathcal{R}$ și punctele lui $\mathcal{B}$ există o corespondență biunivocă. O mișcare tridimensională a corpului $\mathcal{B}$ este o aplicație χ: $\mathcal{R} \times I \to R^3$ unde I este un interval pe dreapta reală, adică

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{R}, \quad t \in I \subset R, \tag{A3.1}$$

cu proprietatea că pentru orice $t \in I$, t fixat $\chi(\cdot, t)$ este injectivă în raport cu $\mathbf{X}$ și bicontinuă. Pentru simplicitate, pentru descrierea punctelor $\mathbf{X}$ din $\mathcal{R}$ cît și pentru descrierea punctelor $\mathbf{x}$ din configurația actuală $\mathcal{D}_t = \chi(\mathcal{R}, t)$ vor fi folosite coordonate carteziene. Ca și în cazul unidimensional se va admite că χ este de clasă C^p, $p \geqslant 2$ în raport cu $(\mathbf{X}, t)$ în afara cazurilor cînd o altă ipoteză de netezime este menționată explicit.

Cantitățile

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \quad \ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t) \tag{A3.2}$$

se numesc viteza și respectiv accelerația particulei materiale. Datorită inversabilității funcției χ din (A3.1) pentru orice t fixat, viteza și accelerația particulei pot fi exprimate și în

funcție de coordonata actuală $\mathbf{x}$ a particulei, adică

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{x}}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t} + (\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\, \mathbf{v}) * \mathbf{v}. \tag{A3.3}$$

Mărimea

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t)\right) = (L_{ij}(\mathbf{x}, t)) \tag{A3.4}$$

se numește gradientul vitezei (sau viteza de deformare). Derivata

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathrm{grad}_{\mathbf{x}})\, \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{A3.5}$$

se numește derivata materială.

O altă măsură a mișcării χ a unui mediu continuu este gradientul deformației definit astfel

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathrm{grad}_{\mathbf{X}}\, \chi(\mathbf{X}, t) = \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial X_j}(\mathbf{X}, t)\right) = (F_{ij}(\mathbf{X}, t)). \tag{A3.6}$$

Între gradientul deformației și gradientul vitezei există următoarea legătură

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} * \mathbf{F}^{-1} \tag{A3.7}$$

unde $\mathbf{F}^{-1}$ este inversa lui $\mathbf{F}$ iar $\dot{\mathbf{F}} * \mathbf{F}^{-1}$ este produsul obișnuit a două matrici.

2. În ceea ce privește forțele care acționează asupra corpului ne vom situa în cazul nepolar (vezi de ex. Truesdell și Toupin [1960], sect. 200, Solomon [1969] Cap. II, Jacob [1959]), adică în cazul în care asupra corpului acționează forțe masice $\mathbf{b}$ funcții de $(\mathbf{X}, t)$ și forțe de contact ce pot fi caracterizate de un tensor $\mathbf{T} = T(\mathbf{X}, t)$ numit tensorul lui Cauchy (vezi de ex. Truesdell și Toupin [1960] sect. 203, Mișicu [1967] §1.2, §§2-1—2.3). Dacă $\mathbf{n}$ este un vector unitar atunci $\mathbf{t}_n = \mathbf{T} * \mathbf{n}$ este forța ce acționează pe unitatea de arie perpendiculară pe $\mathbf{n}$, în configurația actuală.

3. Ecuația de conservare a momentului cinetic conduce la

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T;\ (T_{ij}) = (T_{ji}) \tag{A3.8}$$

unde $(\ )^T$ este operația de luare a transpusei.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile de conservare a impulsului și a energiei în coordonatele actuale se scriu sub forma diferențială astfel

$$\rho\dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T} = \rho\mathbf{b}, \qquad \rho\dot{v}_i - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \rho b_i \tag{A3.9}$$

$$\rho\dot{e} - \mathbf{TL} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} = \rho r, \qquad \rho\dot{e} - T_{ij} L_{ij} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \rho r \tag{A3.10}$$

unde ρ este densitatea actuală de masă, e este energia internă pe unitatea de masă, $\mathbf{q}$ este fluxul de căldură (cantitatea de căldură ce intră în unitatea de timp prin unitatea de arie actuală), $r = r(\mathbf{x}, t)$ este surplusul de căldură pe unitatea de timp și unitatea de masă (absorbit de particula $\mathbf{X}$ a lui $\mathcal{B}$ și furnizat prin radiație de lumea exterioară).

Ecuația de conservare a masei poate fi scrisă sub una din formele

$$\rho_0 = J\rho, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{A3.11}$$

$(A3.11)_1$ este ecuația de conservare a masei în coordonate inițiale, ρ_0 fiind densitatea în configurație de referință iar J este determinantul lui $\mathbf{F}$, $J = \det \mathbf{F}$. $(A3.11)_2$ este ecuația de conservare a masei în coordonate actuale.

Dacă se introduce tensorul lui Piola-Kirchhoff sub forma

$$\mathbf{S} = \rho^{-1}\mathbf{T} * (\mathbf{F}^T)^{-1} = \frac{1}{\rho_0}\tilde{\mathbf{S}} \tag{A3.12}$$

(vezi de exemplu Coleman și Gurtin [1967], Truesdell și Toupin [1960] sect. 210, Mișicu [1967] §1.6, §§2.1—2.3) atunci ecuația (A3.10) se poate scrie sub forma

$$\rho\dot{e} - \rho\mathbf{S}\dot{\mathbf{F}} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} = \rho r. \tag{A3.13}$$

Viteza specifică γ a producției de entropie este definită astfel

$$\rho\gamma = \rho\dot{\eta} - [(\rho r/\theta) - \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{q}/\theta)] \tag{A3.14}$$

unde $\eta = \eta(\mathbf{X}, t)$ este entropia pe unitatea de masă iar $\theta = \theta(\mathbf{X}, t) > 0$ este temperatura absolută.

Scanned with OKEN Scanner

A doua lege a termodinamicii, sau inegalitatea lui Clausius Duhem afirmă că (vezi de exemplu Truesdell și Toupin [1960] Sect. 254)

$$\gamma \geqslant 0. \tag{A3.15}$$

Din (A3.13), (A3.14) și (A3.15) putem scrie

$$\gamma = \dot{\eta} - (\dot{e}/\theta) + \theta^{-1}\,\mathbf{S}\dot{\mathbf{F}} - (1/\rho\theta^2)\,\mathbf{q}\mathbf{g} \geqslant 0 \tag{A3.16}$$

unde

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad}_{\mathbf{x}}\theta, \quad \mathbf{q}\mathbf{g} = q_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i}. \tag{A3.17}$$

Dacă se introduce energia liberă

$$\psi = e - \theta\eta \tag{A3.18}$$

atunci (A3.16) poate fi exprimată și astfel

$$\theta\gamma = -\dot{\psi} - \eta\dot{\theta} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{F}} - (\rho\theta)^{-1}\,\mathbf{q}\mathbf{g} \geqslant 0. \tag{A3.19}$$

Dacă se folosește tensorul $\tilde{\mathbf{S}}$ din (A3.12) ecuațiile de conservare (A3.9) și (A3.10) pot fi scrise în coordonate inițiale astfel

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{S}} &= \rho_0 \mathbf{b} \\ \rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} - \tilde{\mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{q}} &= \rho_0 r \end{aligned} \tag{A3.20}$$

unde $\tilde{\mathbf{q}} = J\mathbf{F}^{-1} * \mathbf{q}$. (Pentru forma generală a ecuațiilor de conservare vezi de asemenea Carlson [1972], Green și Rivlin [1964 a, b]).

4. O suprafață regulată Σ de ecuație $\varphi(\mathbf{X}, t) = 0$ cu $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ și $t \in I$ se numește undă de accelerație prin corpul $\mathcal{B}$ dacă χ este de clasă C^1, $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$, θ, $\tilde{\mathbf{S}}$, ψ, η și $\mathbf{q}$ pot avea discontinuități de salt la traversarea lui Σ, fiind continue pentru $(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{R} \times I - \Sigma$.

Cantitățile

$$U = -\frac{\partial\varphi/\partial t}{|\operatorname{grad}_{\mathbf{X}}\varphi|}, \quad n_i = \frac{\partial\varphi/\partial X_i}{|\operatorname{grad}_{\mathbf{X}}\varphi|} \tag{A3.21}$$

se numesc respectiv, viteza de propagare a undei de accelerație și direcția de propagare a undei de accelerație.

Scanned with OKEN Scanner

Salturile derivatelor mărimilor termomecanice $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$, θ, $\tilde{\mathbf{S}}$, ψ, η și $\mathbf{q}$ nu pot fi independente, ele sînt supuse la trei tipuri de condiții. Condițiile de compatibilitate geometrico-cinematice exprimă faptul că salturile cantităților $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}}$, etc. sînt legate datorită continuității lui $\mathbf{v}$, etc. și faptul că $\mathbf{v}$ și $\mathbf{F}$ sînt derivatele aceleași funcții vectoriale $\boldsymbol{\chi}$. Aceste condiții de compatibilitate pot fi scrise astfel:

$$\left[\frac{\partial v_k}{\partial t}\right] = U^2 a_k, \quad \left[\frac{\partial F_{kl}}{\partial X_j}\right] = a_k n_l n_j, \quad \left[\frac{\partial F_{kl}}{\partial t}\right] = -U a_k n_l \tag{A3.22}$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial t}\right] = -U\nu, \quad \left[\frac{\partial \theta}{\partial X_j}\right] = \nu n_j, \tag{A3.23}$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{S}_{ij}}{\partial t}\right] = -U s_{ij}, \left[\frac{\partial \tilde{S}_{ij}}{\partial X_k}\right] = s_{ij} n_k, \text{ etc.} \tag{A3.24}$$

unde $[f] = f^+ - f^-$, f^+ este valoarea limitei lui f în punctul de pe suprafața Σ cînd venim din partea pozitivă a normalei $(\mathbf{n}, -U)$ la Σ, în acel punct, iar f^- este limita lui f cînd venim în același punct de pe suprafața Σ din partea negativă a normalei $(\mathbf{n}, -U)$. Vectorul $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se numește amplitudinea mecanică a undei, scalarul ν se numește amplitudinea termică a undei, s_{ij} se poate numi amplitudinea tensiunii, etc.

A doua grupă de restricții asupra salturilor provine din ecuațiile de conservare. Aceste restricții se numesc condiții dinamice de compatibilitate și ele se obțin din ecuațiile (A3.20) cum urmează: se scriu aceste ecuații în două puncte situate unul de o parte iar altul de cealaltă parte a suprafeței Σ, se trece apoi la limită la un punct de pe Σ, apoi se face diferența între ecuațiile respective obținute. Deoarece $\mathbf{b}$ și r sînt presupuse continue se obțin următoarele condiții omogene de compatibilitate dinamică

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[\frac{\partial v_i}{\partial t}\right] - \left[\frac{\partial \tilde{S}_{ij}}{\partial X_j}\right] &= 0 \\ \rho_0 \left[\frac{\partial e}{\partial t}\right] - \tilde{S}_{ij} \left[\frac{\partial F_{ij}}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial X_j}\right] &= 0. \end{aligned} \tag{A3.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

Al treilea grup de restricţii asupra salturilor este impus de ecuaţiile constitutive adică de relaţiile ce trebuie să existe între $\mathbf{F}$, θ, $\text{grad}_X\,\theta$, $\tilde{\mathbf{S}}$, η, ψ şi $\mathbf{q}$. Aceste restricţii nu vor fi considerate în această anexă. Modul cum se pun aceste restricţii a fost examinat în detaliu în Cap. VII pentru materiale cu variabile interne de stare.

Condiţiile de compatibilitate geometrico-cinematice şi dinamice, în cazul unei suprafeţe izolate de discontinuitate, au fost prezentate pentru prima odată, în cazul general tridimensional de Hadamard [1903] (pentru bibliografie vezi Cap. VII). Condiţii similare de compatibilitate se obţin şi în cazul mult mai general cînd nu se presupune că discontinuităţile mişcării sînt situate pe o suprafaţă izolată de discontinuitate (Suliciu [1973]).

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

AHRENS, T. J., G. E. DUVALL, 1966, J. Geophys. Res., 71, 4349—4360

ALTER, B. E., C. W. CURTIS, 1956, J. Appl. Phys., 27, 1079—1085

AVITZUR, B., 1967, Trans. ASME., Ser. B, J. Eng. Indust., 89, 556

AVITZUR, B., 1968, Metal Forming: *Processes and Analysis*, Mc Graw Hill, New York

BANERJEE, A. K., L. E. MALVERN, 1974, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., *41*, 3, 615—618

BARKER, L. M., 1968, *Fine structure of compressive and release wave shapes in aluminum measured by the velocity interferometer technique*, In: IUTAM Symposium HDP, Gordon and Breach, New York

BARKER, L. M., B. M. BUTCHER, C. H. KARNES, 1966, J. Appl. Phys, 37, 1989—1991

BELL, J. F., 1951, *Propagation of plastic waves in pre-stressed bars.*, U. S. Navy Tech. Rep., No. 5, Baltimore, The Johns Hopkins University

BELL, J. F., 1960, J. Appl. Phys., 31, 2188—2195

BELL, J. F., 1961, J. Appl. Phys, 32, 1982—1993

BELL, J. F., 1968, *The Physics of large deformation of crystalline solids*. Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 14, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York

BELL, J. F., 1969, Int. J. Mech. Sciences, 11, 633—657

BELL, J. F., 1973, *The Experimental Foundations of Solid Mechanics*, Handbuch der Phys., vol. VIa/1, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York

BELL, J. F., A. STEIN, 1962, J. Mécan., 1, 395—412

BALTOV, A., 1971, Teor. i prikl. Mehanika, 3, 41—51

BEREZIN, I. S., N. P. JIDKOV, 1960, *Metodî vîcislenii*, Moscova

BIANCHI, G., 1964, *Some experimental and theoretical studies on the propagation of longitudinal plastic waves in a strain-rate dependent material*. In: H. Holsky and W. Prager, eds., Stress waves in anelastic solids, Springer Verlag Berlin Gottingen Heidelberg, 101—117

BINGHAM, E. C., 1922, *Fluidity and plasticity*, McGraw Hill, New York

Scanned with OKEN Scanner

BOLEY, B. A., J. H. WEINER, 1960, *Theory of Thermal Stresses*, John Wiley, New York
BOWEN, R. M., 1968, J. Chem. Phys. 49, 1625—1637
BOWEN, R. M., 1969, Arch. Rational Mech. Anal., 33, 169—180
BOWEN, R. M., P. J. CHEN, 1972, Acta mech., 15, 95
BOWEN, R. M., C. C. WANG, 1971, Arch. Rational Mech. Anal., 41, 287
BUZDUGAN, GH, 1974, *Rezistența materialelor*, Ed. Tehnică, București
CALLADINE, C. R., 1969, *Engineering Plasticity*, Pergamon Press, Oxford London
CAMPBELL, J. D., 1973, *Materials Science and Engineering*, 12, 3—21
CARLSON, D. E., 1972, *Linear Thermoelasticity*, Handbuch der Physik, vol 6a/2, Springer-Verlag Berlin.
CATTANEO, C., 1948, *Atti del Seminario Matem.* Fiz., Univ. di Modena, 3, 83
CATTANEO, C., 1958, Compt. Rend. Sci., 247, 431
CHEN, P. J., M. E. GURTIN, 1971, Phys. Fluids, 14, 1091—1094
CHEN, P. J., M. E. GURTIN, 1972, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), 23, 69—79
CODDINGTON, E. A., N. LEVINSON, 1955, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw Hill, New York
COLEMAN, B. D., M. E. GURTIN, 1965, Arch. Rational Mech. Anal., 19, 266—298 (retipărită în „Wave propagation in dissipative Materials", Springer Verlag)
COLEMAN, B. D., M. E. GURTIN, 1967, J. Chem. Phys., 47, 597—613
COLEMAN, B. D., M. E. GURTIN, 1967 a, Phys. Fluids, 10. 1454—1458
COLEMAN, B. D., M. E. GURTIN, I. R. HERRERA, C. TRUESDELL, 1965, în: „Wave propagation in Dissipative Materials", Springer Verlag
COLEMAN, B. D., W. NOLL, 1959, Arch. Rational Mech. Anal., 4, 97
COLEMAN, B. D., W. NOLL, 1963, Arch. Rational Mech. Anal., 13, 167—178
COURANT, R., K. O. FRIEDRICHS, 1948, *Supersonic flow and shock waves Interscience* Publ., New York
CRISTESCU, N., 1963, Bull. Acad. Polon. Sci., *11*, 129—133
CRISTESCU, N., 1964, *Some problems on the mechanics of extensible strings*. În: Stress Waves in Anelastic Solids, eds. H. Kolsky and W. Prager Springer Verlag, pp. 118—132
CRISTESCU, N., 1965, Arch. Mech. Stos., *17*, 291—305
CRISTESCU, N., 1967, *Dynamic Plasticity*, North Holland Publ. Comp., Amsterdam
CRISTESCU, N., 1970, Int. J. Mech. Sciences, *12*, 723—738 (sau Mehanika, No. 5, 1971, 125—141)
CRISTESCU, N., 1971a, Rev. Roumaine Sci. Techn., Ser. Mec. Appl., *16*, 797—809
CRISTESCU, N., 1971b, *Introduction to rate-dependent plasticity*, Cursuri ținute la International Centre for Applied Mechanics Udine, Italia
CRISTESCU, N., 1972a, *The influence on the plastic wave propagation of the variation of Young's modulus with plastic strain*. In: Proc. of the First Intern. Conf. on Structural Mechanics, in Reactor Technology, Berlin, vol. 6, Part L, 231—250
CRISTESCU, N., 1972b, Int. J. Solids Structures, *8*, 511—531

Scanned with OKEN Scanner

CRISTESCU, N., 1974a, *Rate-type constitutive equations in dynamic plasticity*. In: Problems of plasticity, Nordhoff Intern. Publ., 287—310

CRISTESCU, N., 1974b, A *theory of fast extrusion*. In: Topics in contemporary mechanics (Luigi Sobrero 65 Anniversary volume) Udine, Springer Verlag, Wien New York, 67—68

CRISTESCU, N., 1974 c, *Curgerea plastică printr-o matriță conică convergentă, utilzînd o ecuație constitutivă vîscoplastică*. Univ. din București, Laboratorul de plasticitate (litografiat).

CRISTESCU, N., 1975a, *Vlianie izmenenia modulia Yunga vsledstvie plasticeskoi deformații na rasprostranenie plasticeskih voln*. In: Uspehi mehaniki deformiruemîh sred, Izd. Nauka, Moscova, 311—324

CRISTESCU, N., 1975b, Int. J. Mech. Sciences, *17*, 425—433

CRISTESCU, N., 1975c, Mechanics Res. Communications (sub tipar)

CRISTESCU, N., 1976, *Drawing through conical dies — an analysis compared with experiments*, Int. J. Mech. Sciences (sub tipar)

CRISTESCU, N., J. F. BELL, 1970, *On unloading in the symmetrical impact of two aluminum bars*. In: M. F. Kannienen, W. F. Adler, A. R. Rosenfield, R. I. Jaffee, Inelastic Behaviour of Solids, McGraw Hill, New York, 397—421, sau Mehanika, No. 1, 1973, 151—168

CRISTESCU, C., N. CRISTESCU, 1973, *A numerical method to describe unloading in dynamic plasticity*. In: Proc. of the second Intern. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, vol. 5, Part. L.

DANILOVSKAIA, V. I., 1950, Prikl. Mat. Meh., 14, 316

DIEUDONNE, J., 1968, *Elements d'Analyse*, Vol. 1, Gauthier Villars, Paris

DUVALL, G. E., 1961, *Some properties and applications of shock waves*. In: eds. P. S. Shewmon, V. F. Zackay, Response of Metals to High Velocity Deformation, Interscience Publ. New York, 165—203

EFRON, L., L. E. MALVERN, 1969, Experimental Mech., 9, no. 6, 1—8

EIRICH, F. R., editor, 1956, *Rheology, Theory and Applications*, Academic Press, New York

FILBEY, G. L., 1961, *Intensive plastic waves*. Ph. D. dissertation, The Johns Hopkins University, Baltimore

FORD, H., 1963, *Advanced Mechanics of Materials*, Longmans, London

FORSYTHE, G. E., W. R. WASOW, 1960, *Finite-difference methods for partial differential equations*, John Wiley and Sons, New York London

FOWLES, G. R., 1973, *Experimental Technique and Instrumentation*. In: P. C. Chou, A. K. Hopkins, eds., Dynamic Response of Materials to Intensive Impulsive Loading, Air Force Materials Laboratory, 405—480

FRANK, R., P. QUELLEC, 1974, Bull. Liaison Labo. P. et. Ch., 73, 45—51

FREUDENTHAL, A. M., 1958, *The mathematical theories of the inelastic continuum*, Handbuch Der Physik, Band VI, Springer Verlag, Berlin

Scanned with OKEN Scanner

GIBBS, J. W., 1928, *The Collected Works of J. W. Gibbs*, vol. 1, Thermodynamics, Yale University Press, New Haven, Conn.
GREEN, A. E., R. S. RIVLIN 1964 a, Arch. Raţional Mech. Anal,. **16**, 113—147
GREEN, A. E., R.S. RIVLIN, 1964 b, Arch. Raţional Mech. Anal., **17**, 325—353
GREENBERG, J. M., 1968, Quart. Appl. Math., **26**, 27—34
GURTIN, M. E., A. C. PIPKIN, 1968, Arch. Rational Mech. Anal., **31**, 113
GURTIN, M. E., I. SULICIU, 1972, *Thermodynamics of rate type constitutive equations* (manuscris)
GURTIN, M. E., I. SULICIU, 1974, *Thermodynamics of rate type constitutive equations — continued (manuscris)*
GURTIN. M. E., W.O.WILLIAMS, 1966, Arch. Rational Mech. Anal. **23**, 163
HADAMARD, J., 1903, *Lecons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique*, *Hermann*, Paris
HALANAY, A., 1963, *Teoria Calitativă a Ecuaţiilor Diferenţiale*, Editura Academiei R. P. Române, Bucureşti
HANSON, D., M. A. WHEELER, 1931, J. Inst. Metals, **45**, 229—264
HARTMAN, P., *Ordinary differential equations*, Johns Wiley and Sons, New York
HAYES, M., 1969, Arch. Rational Mech. Anal., **33**, 188—191
HILL, R., 1950, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford
HOHENEMSER, K, W. PRAGER, 1932, Z. Angew. Math. Mech., **12**, 215—226
HOLLAND, J. R., 1967, Acta Metallurgica, **15**, 691—699
ILIUŞIN, A. A., V. S. LENSKII, 1959, *Soprotivlenie materialov*, Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit., Moscova
JACOB, C., 1959, *Introduction mathématique à la méchanique des fluides*, Ed. Acad. R.P.R. Bucureşti şi Gauthier Villars Paris
JEFFREY, A., T. TANIUTI, 1964, *Non-linear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics*, Academic Press, New York London
JOHNSON, J. N., 1969, J. Appl. Phys., **40**, 2287—2293
JOHNSON, J. N., L. M. BARKER, 1969, J. Appl. Phys., **40**, 4321—4334
JOHNSON, W., P. B. MELLOR, 1962, *Plasticity for Mechanical Engineers*, Van Nostrand Comp., London, Toronto, New York, Princeton
JOHNSON, W., R. SOWERBY, J. B. HADDOW, 1970, *Plane-Strain Slip-Line Fields*, Ed. Arnold Publ., London
JOHNSTON, W. G., J. J. GILMAN, 1959, J. Appl. Phys., *30*, 129
JONES, O. E., J. D. MOTE, 1969, J. Appl. Phys., **40**, 4920—4928
JUKOV, A. M., 1960, Inj. Sbornik, **30**, 3—16
KACIANOV, L. M., 1974, *Fundamentals of the Theory of Plasticity*, Mir Publ., Moscow
KÁRMÁN, TH. von, P. DUWEZ, 1950, J. Appl. Phys., **21**, 987
KARNES, C. H., 1968, *The plate impact configuration for determining mechanical properties of materials at high strain rates*. In: U. S. Lindholm, ed., Mechanical behavior of materials under dynamic loads, Springer Verlag, New York
KESTIN, J., J. R. RICE, 1970, *Paradoxes in the application of thermodynamics to strained solids*, Proc. of Intern. Symp., A critical

Scanned with OKEN Scanner

review of the foundation of relativistic and classical thermodynamics, Mono Book Corp, Baltimore
KOLSKY, H., W. PRAGER, eds., 1964, *Stress Waves in Anelastic Solids* Springer Verlag, Berlin Gottingen Heidelberg
KOSIŃSKI, W., P. PERZYNA, 1972, Arch. Mech. Stos., **24**, 629
KRATOCHVIL, J., 1973, Acta Mech., **16**, 127—142
KRATOCHVIL, J., O. W. DILLON, 1969, J. Appl. Phys., **40**, 3207—3218
KRATOCHVIL, J., O. W. DILLON, 1970, J. Appl. Phys, **41**, 1470—1479
KRONER, E., C. TEODOSIU, 1974, *Lattice defect approach to plasticity and viscoplasticity*, In: Foundations of Plasticity, Nordhoff Int. Publ., 45—88
KUKUDJANOV, V. N., 1967, *Rasprostranenie uprugo-plasticeskih voln v sterjne s uceton vliania skorosti deformații*, Vîcislitelnîi centr AN SSSR, Moscova
KURIYAMA, S., K. KAWATA, 1973, J. Appl. Phys., **44**, 3445—3454
LEE, E. H., 1953, Quart. Appl. Math., **10**, 335—346
LEE, E. H., 1956, *Wave propagation in inelastic materials*. In: IUTAM Coloq. Deformation and Flow of Solids, p. 129
LEE, E. H., 1960, *The theory of wave propagation in anelastic materials*. In: N. Davids, ed., Stress Wave Propagation in Materials, Interscience Publ., 199—228
LINDHOLM, U. S. ed., 1968, *Mechanical behavior of materials under dynamic loads*. Springer Verlag, New York
LINDHOLM, U. S., R. L. BESSEY, 1969, *A survey of rate dependent strength properties of metals*, Rept. AFML-TR-69-119
MAKUȘOV, E. M., V. M. SEGAL, T. V. KALINOVSKAIA, D. I. DMITROVICI, V. I. REZNIKOV, N. F. KLEBANOVICI, 1973, *Novîe metodî islodovania proțesov obrabotki metalov davleniem*, Minsk
MALVERN, L. E., 1951a, Quart. Appl. Math., **8**, 405—411
MALVERN, L. E., 1951b, J. Appl. Mech., **18**, 203—208
MALVERN, L. E., 1965, *Experimental studies of strain-rate effects and plastic wave propagation in annealed aluminium*. In: Behavior of Materials under Dynamic Loading, ASME Colloquium
MALISEV, V. M., 1960, Izv. Akad. Nauk SSSR, OTN, Meh. Mat., *2*, 120—124
MALISEV, V. M., 1961, J. Prikl. Meh. Techn. Fiz., *2*, 104—110
MANDEL, J., 1972, *Plasticité classique et viscoplasticité*, Springer Verlag, Wien New York
MARIN, S., 1975, Sesiunea științifică student. Univ. București
MASSAU, J., 1899, *Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles*, F. Meyer-Van Loo, Gent
MASSON, A. P., 1841, *Annales de Chimie et de Physique*, 3 série, 451—462
MIHĂILESCU, M., I. SULICIU, 1976, *Finite and symmetric thermomechanical waves in materials with internal state variables* Int. J. Solids Structures (sub tipar)
MISICU, M., 1967, *Mecanica mediilor deformabile*, Editura Academiei R. S. România, București
NICOLESCU, M., 1958, *Analiză Matematică*, vol. II, Editura Tehnică, București
ROHDE, R. W., 1969, Acta Metallurgica, **17**, 353—363

Scanned with OKEN Scanner

PONOMARIOV, S. D., V. L. BIDERMAN, C. K. LIHAREV, V. M. MAKUSIN, N. N. MALININ, V. I. FEODOSIEV, 1960, *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, Ed. tehnică, București
PORTVIN, A., F. LE. CHATELIER, 1923, C. R. Acad. Sci. Paris, **176**, 507—510
PUGH, H. LL. D., 1970, *Mechanical Behaviour of Materials under Pressure*, vol. 2, Elsevier, Amsterdam
RAHMATULIN, H. A., 1945, Prikl. Mat. Meh., **9**, 91—100
RAHMATULIN, H. A., I. A. DEMIANOV, 1961, *Procinost pri intensivnîh kratkovremenîh nagruzkah*, Moscova
REINER, M., 1960, *Deformation, Strain and Flow*, H. C. Lewis Co, London
RENNE, I. P., 1965, *Kuznecino-ștampobocinoe proizvodstva*, 4, 7—9
TRUESDELL, C., 1961, Arch. Rational Mech. Anal., **8**, 263
TRUESDELL, C., 1969, *Rational Thermodynamics*, A course of lectures on selected topics, McGraw Hill, New York
TRUESDELL, C., W. NOLL, 1965, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, vol. III/3, Springer Verlag, Berlin
TRUESDELL, C., R. E. TOUPIN, 1960, *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Vol. III/1, Springer Verlag, Berlin
VALANIS, K. C., J. Math. Phys., **47**, 262—275
WISTREICH, J. G., 1655a, Proc. Inst. Mech. Engrs, **169**, 654—665
WISTREICH, J. G., 1955b, Proc. Inst. Mech. Engrs, **169**, 666—668
WOOD, E. R., A. PHILLIPS, 1967, J. Mech. Phys. Solids, **15**, 241—254
ZARKA, J., 1970, *Sur la viscoplasticité des métaux*, Mém. l'Art. Franc., fac. 2e.

Scanned with OKEN Scanner

Redactor: NATALIA FIUCUIC
Tehnoredactor: ELLY GORUN
Coperta: ALEXANDRU BANU

Bun de tipar: 21.1.1976. Coli de tipar: 19.
Tiraj: 1970+70 exemplare broșate. C. Z. 539.374

Tiparul executat sub comanda
nr. 1562 la
Întreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918"
str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97,
București,
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner